

# MATEMÁTICA... ¿ESTÁS AHÍ?

Episodio 3,14

*por*

ADRIÁN PAENZA  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Colección "Ciencia que ladra..."

Dirigida por DIEGO GOLOBEK



Universidad  
Nacional  
de Quilmes



Siglo  
veintiuno  
editores  
Argentina

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Paenza, Adrián  
Matemática... ¿estás ahí? episodio 3,14 - 1a ed. - Buenos Aires : Siglo XXI  
Editores Argentina, 2007.  
240 p. ; 19x14 cm. (Ciencia que ladra... dirigida por Diego Golombek)

ISBN 978-987-629-017-3

1. Matemática. I. Título  
CDD 510

Portada de Mariana Nemitz

© 2007, Siglo XXI Editores Argentina S. A.

ISBN 978-987-629-017-3

Impreso en Artes Gráficas Delsur  
Almirante Solier 2450, Buenos Aires,  
en el mes de octubre de 2007

Hecho el depósito que marca la ley 11.723  
Impreso en Argentina – Made in Argentina

Y se va la tercera... Entrar nuevamente en el universo Paenza es un viaje de ida y, además, adictivo. Por eso, y porque sobran ideas, enigmas, problemas e invitaciones a pensar, sale este nuevo libro de Adrián, tan fascinante como los primeros *Matemática... ¿Estás ahí?* y *Matemática... ¿Estás ahí? Episodio 2*. Nuevamente, el autor nos abre la puerta para ir a pensar (y, por qué no, a jugar), una nueva puerta de entrada a la matemática, esa musa que tantas veces se nos presenta esquiva y díscola.

Quiero contarles aquí algo de mi experiencia como primer lector de algunos de estos textos, de la tarea de ir soñándolos juntos en forma de libro. Leer a Adrián es más bien escucharlo, sentir las pausas, las comas, las inflexiones. Efectivamente: les aseguro que el texto inicial es aún más “oral”, con multitudes de negritas, bastardillas, mayúsculas, signos admirables y preguntones. Es como tener al autor en un café leyéndonos –o, mejor todavía, contándonos, frente a un pizarrón– cada una de las frases, cada uno de los misterios.

En algún lado de esa comunicación se produce un milagro, y tantos lectores oyentes convierten dos libros de matemática en un éxito increíble. ¿Será que el autor es cara conocida en estas costas? Si es así, difícil explicar el suceso del libro en España y México, o su próxima publicación en Brasil, Portugal, República Checa, Alemania e Italia. ¿Será que queda bien mostrar en la oficina o el colectivo que uno lee matemática? Mmmm... tampoco: la gente se guarda el texto como un tesoro y, por si fuera poco, lo puede bajar gratis de Internet. En definitiva: es un misterio maravilloso, que despierta las ganas

de saber, de preguntar, de ser un poco más racionales en la vida de todos los días, que buena falta nos hace.

Tal vez sin saberlo, con sus historias Paenza nos trae otro regalo. Existe una tribu en el Amazonas, los pirahã, que es la favorita de los lingüistas: entre otras curiosidades, no tienen palabras ni conceptos para los números. El asunto es que su lenguaje es también limitado en el sentido de que no tiene referencias temporales: entre los pirahã no sólo faltan los números, sino que tampoco hay ayer ni mañana. Quizá sea, entonces, que Adrián nos brinda, junto con sus preguntas, sus problemas y sus números la posibilidad de una historia, y de un futuro. Casi nada.

Esta colección de divulgación científica está escrita por científicos que creen que ya es hora de asomar la cabeza por fuera del laboratorio y contar las maravillas, grandezas y miserias de la profesión. Porque de eso se trata: de contar, de compartir un saber que, si sigue encerrado, puede volverse inútil.

Ciencia que ladra... no muerde, sólo da señales de que cabalga.

DIEGO GOLOMBEK

*Este libro es para mis padres, Fruma y Ernesto.*

*Una vez más, mi gratitud eterna. Todo lo que haga en la vida  
estará siempre dedicado a ellos primero.*

*A mi hermana Laura y su compañero Daniel.*

*A todos mis sobrinos.*

*A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin,*

*Miguel Ángel Fernández, Héctor Maguregui, Cristian Czubara,*

*Eric Perle, Lawrence Kreiter, Kevin Bryson, Alejandro Fabbri,*

*Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Santiago Segurolo,*

*Carlos Aimar, Marcelo Araujo, Marcos Salt, Diego Goldberg,*

*Julio Bruetman, Gabriel Cavallo, Eduardo Bertoni, Antonio Laregina,*

*Woody González, Gary Crotts y Claudio Pustelnik.*

*A mis amigas Ana María Dalessio, Nilda Rozenfeld,*

*Teresa Reinés, Alicia Dickenstein, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez,*

*Nora Bernárdez, Carina Marchesini, Laura Bracalenti,*

*Etel Novacovsky, Marisa Gimenez, Mónica Muller, Érica Kreiter,*

*Susy Goldberg, Holly Perle, Marisa Pombo y Carmen Sessa.*

*A la memoria de mis seres queridos que perdí en el camino: Guido*

*Peskin; mis tías Delia, Elena, Miriam y Elenita;*

*mi primo Ricardo, y a la de mis entrañables compañeros de vida,*

*Noemí Cuño, León Najnudel y Manny Kreiter.*

## Acerca del autor

Adrián Paenza

cql@sigloxxieditores.com.ar

Nació en Buenos Aires en 1949. Es doctor en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires, en la que se desempeña actualmente como profesor asociado del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Es, además, periodista. En la actualidad conduce el ciclo “Científicos Industria Argentina”. Trabajó en las radios más importantes del país y en los cinco canales de aire de la Argentina. Fue redactor especial de varias revistas y colaborador en tres diarios nacionales: *Clarín*, *Página/12* y *La Nación*. Publicó en esta misma colección *Matemática... ¿Estás ahí?* y *Matemática... ¿Estás ahí? Episodio 2*.

A Diego Golombek y Carlos Díaz. Ellos dos son los grandes impulsores de que esta serie de libros –de matemática nada menos– haya sido publicada. Diego tuvo la idea y Carlos se dejó seducir. Los dos merecen el mayor crédito.

A mis alumnos. Muchos de ellos reconocerán los problemas, los giros y los dichos que usé para contarlos. Varios ya me lo hicieron notar en los volúmenes anteriores. Ellos fueron parte interactiva en distintos momentos de mi carrera docente y me enseñaron a entender mejor cada enunciado y solución. Y porque me enseñaron a enseñar.

A quienes leyeron apasionadamente el manuscrito, y me ayudaron a mejorarlo, muy especialmente Carlos D’Andrea y Gerardo Garbulsky, quienes invirtieron infinito tiempo y paciencia. El rigor con el que ambos analizaron y criticaron cada uno de los problemas de cada uno de los tres tomos fue invaluable para mí.

A Alicia Dickenstein, Eduardo Cattani, Teresita Krick, Pablo Milrud, Pablo Coll, Cristian Czubara, Gabriela Jerónimo, Matías Graña, Pablo Amster, Pablo Mislej, Juan Sabia, Gustavo Stolovitzky, Lucas Monzón, Ariel Arbiser, Juan Carlos Pedraza, Rodrigo Laje y Gerardo Garbulsky, por las ideas con las que colaboraron en toda este serie, varias de ellas publicadas acá.

A Claudio Martínez, porque además de amigo personal es un gusto encarar con él cualquier proyecto profesional.

A Alicia Dickenstein, Eduardo Dubuc, Carmen Sessa, Néstor Búca-

ri, Miguel Herrera, Oscar Bruno, Jorge Fiora, Ricardo Durán, Ricardo Noriega, Pablo Calderón, Leandro Caniglia, Luis Santaló, Ángel Larotonda, Baldomero Rubio Segovia y Enzo Gentile, porque con ellos aprendí matemática.

A Guillermo Alfieri, Jorge Guinzburg, Lalo Mir, Tristán Bauer, Ernesto Tenenbaum y Marcelo Zlotogwiazda, por la generosidad y el afecto con que me tratan.

A Ernesto Tiffenberg por atreverse a publicar semanalmente –en una suerte de “salto al vacío”– estas columnas de matemática en la contrapapa de *Página/12*.

Una vez más, mi gratitud para todos los comunicadores de los distintos medios que promovieron los libros anteriores y formaron parte (sin saberlo ni proponérselo) en una suerte de cruzada en pro de la matemática.

A toda la comunidad matemática, que desde los lugares más impensados piensa por mí (y lo bien que hace). Muchos encontrarán en este tomo las ideas que me dieron.

A Violeta Collado y Héctor Benedetti por la protección que me ofrecen con cada uno de los libros.

A mis compañeros de la Editorial Siglo XXI, de El Oso Producciones, del Canal Encuentro y de Canal 7, de *Página/12* y de la empresa de grabación Non-Stop, por el calor que me brindan.

A Oriol Castanys y Joaquín Palau, ambos directores de RBA Libros en España, por el afecto con que me abrigaron en mi visita a Madrid y por lo que hicieron por mí y por los libros en Europa.

Y (como siempre) a Marcelo Bielsa, Nelson Castro, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky, por su postura ética en la vida. Conocerlos y tratarlos me hace mejor persona.

Me llevó diez años tener éxito  
de la noche a la mañana.

WOODY ALLEN

La inspiración existe, pero cuando pasa  
te tiene que encontrar trabajando  
(¿o habrá pasado justamente  
porque te vio trabajando?).

<b>Prólogo</b> .....	<b>15</b>
<b>¿Ya se sabe “todo” en matemática?</b> .....	<b>21</b>
<b>La matemática tiene sus problemas</b> .....	<b>25</b>
<p>Dos pintores y una pieza, 25. ¿Da lo mismo subir que bajar un 40%?, 25. Problema de los seis fósforos, 26. ¿Cómo hacer para pesar diez kilos con una balanza desbalanceada?, 26. Los tres recipientes con dos tipos de monedas que tienen las etiquetas cambiadas, 27. Las cuatro mujeres y el puente, 27. Problema de las 10 monedas, 28. Cuatro interruptores, 29. Problema de las ocho monedas, 30. Problema de la barra de chocolate, 30. Un cambio en la rutina, 31. Dos tías y dos colectivos, 33. Ocho números conectados, 35. Problemas de Fermi, 36. Otro problema de Fermi, 37. Problema de la montaña, 38. Ocho reinas, 39. El cronómetro y las infinitas monedas, 40. Las hormigas y Alicia, 42. Dos preguntas (en una), 43. El acolchado cuadrado, 44. ¿Siempre hay puntos “antipodales” en la Tierra que tienen la misma temperatura?, 45. Ramo de rosas de distintos colores, 49.</p>	
<b>Números y matemática</b> .....	<b>51</b>
<p>Menos por menos es más... ¿Seguro?, 51. ¿Es verdad que <math>0,99999... = 1</math>?, 55. Patrones y bellezas matemáticos, 55. Velocidad del crecimiento del pelo, 57. Combinatoria y reproductor de CD, 57. Una curiosidad más sobre los infinitos (y el cuidado que hay que tener con ellos), 60. Don Quijote de la Mancha, 62. Más sobre el infinito. La Paradoja de Tristram Shandy, 66. Suma de</p>	

los primeros  $n$  números naturales, 66. Suma de números impares, 71. La Ley de Benford, 72. Tirar 200 veces una moneda, 78. Fórmulas para obtener números primos, 79. Ternas pitagóricas, 87. Un desafío, 94. Un número primo  $p$  y ladrillos de  $(m \times n)$ , 97. Problema de Brocard (un problema *abierto*), 99.

## Juegos y matemática . . . . . 101

Teoría de juegos. Estrategia (una definición), 101. La matemática y la niña que no sabía jugar al ajedrez, 108. Estrategia para ganar siempre, 109. Miranda, Gardner y el partido de tenis, 110. División justa, 111. Juego de la vida, 114. Transitividad y los tres dados de colores, 119. ¿Cómo adivinar un número?, 124. Ternas consecutivas en una ruleta, 127. Triplos, 128. Nim, 134.

## Reflexiones y curiosidades matemáticas . . . . . 147

Los matemáticos y las vacas, 147. Niñas en la playa, 148. Una manera *gráfica* de multiplicar, 149. Sophie Germain, 154. Estimar y errar, 158. El perro llamado Fido y la paradoja de Bertrand Russell, 159. Paradoja de Allais, 161. ¿Qué es la inteligencia?, 163. Paradoja de las papas, 167. Clave pública, 167.

## La educación de los jóvenes . . . . . 177

## Soluciones . . . . . 181

## Prólogo

Viernes 7 de enero de 2005. Suena el teléfono de mi casa en Chicago. Es Diego Golombek desde Buenos Aires.

–Adrián –me dice–. Como sabés, estoy dirigiendo una colección de libros que sirven para difundir la ciencia. Quiero publicar textos *no acartonados*, que acerquen la ciencia a la gente. ¿No tenés ganas de escribir un volumen sobre matemática?

Me quedé callado por un momento –que Diego entendió como vacilación– y arremetió nuevamente:

–Mirá: alcanzaría con que escribas las historias que contás al final de cada uno de los programas –se refería a *Científicos Industria Argentina*.

–Diego –le dije–, eso no le va a interesar a nadie –un visionario yo, evidentemente.

–No importa. Eso dejalo por mi cuenta. No me contestes ahora. Pensalo y nos hablamos el lunes.

Obviamente, el diálogo fue más largo y no lo recuerdo con precisión, pero de lo que sí estoy seguro es de que –conceptualmente– fue así.

Y me quedé pensando: si habíamos hecho dos años consecutivos de programas en Canal 7, a 52 por año, eran 104 historias. Teniendo en cuenta que sólo habíamos repetido un programa (el de Alberto Kornblihtt hablando de biología) y no se habían emitido los dos que correspondían a los respectivos fines de año (2003 y 2004), tenía alre-

dedor de 100 historias. Si escribía dos historias por día, en 50 días terminaría... ¡y tendría un libro!

Lunes 10 de enero del 2005.

–Diego. Soy Adrián –esta vez, llamé yo.

–¿Qué tal? ¿Lo pensaste?

–Sí, lo voy a hacer.

–Bárbaro, teneme informado y contá conmigo para lo que te haga falta.

–¿No necesito hablar con la gente de la editorial?

–No te preocupes. Eso lo arreglo yo.

Durante ese fin de semana, había hablado con Claudio Martínez, Alicia Dickenstein, Alberto Kornbliht y Víctor Hugo Morales. Cada uno me impulsó a que lo hiciera.

No tardé cincuenta días, sino más del doble. Yo no lo sabía, pero por más que había contado por televisión casi todas las historias que figuran en el primer volumen de *Matemática... ¿Estás ahí?*, una cosa era haberlas “hablado”, y otra, muy diferente, era escribirlas. Pero lo hice.

Llegó el momento de la firma del contrato. Hasta ahí, nunca había hablado de dinero, ni con Diego ni con ninguna otra persona. Todavía no conocía a Carlos Díaz, el director de Siglo XXI. Nos sentamos en su oficina de la calle Tucumán y luego de las charlas triviales de presentación, le dije que tenía que hacerle un pedido.

–Adelante –me dijo

–Quiero que el libro se pueda *bajar* por Internet.

–Por supuesto –me interrumpió.

–Sí –agregué yo–, pero quiero que se pueda bajar *gratuitamente*. Quiero que el libro sea accesible para todos.

Carlos me miró a los ojos e hizo silencio. Diego, que no sabía lo que yo iba a decir, hacía ruido con los nudillos de los dedos contra la mesa. El tiempo *no transcurría*. Parecía que estábamos en una película en la que alguien había apretado el botón de *pausa*.

–De acuerdo –me dijo Carlos–. No hay problema. Es algo que nunca pensé que un autor me propondría, pero no le veo inconve-

nientes. ¿Dónde querés que aparezca? ¿En qué página de Internet? ¿En la de la editorial?

–No tengo problema de que lo incluyan ahí también, pero quiero que figure en la página del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Yo soy profesor ahí, y siento que usé el tiempo que me paga la facultad para escribir el libro.

–Sólo quiero pedirte algo. No lo *cuelgues* de Internet hasta que publiquemos el libro. Yo sé que tenés el material listo, pero hagámoslo simultáneamente.

Y así fue. Pero la historia no termina ahí; hay más. Carlos me acercó el texto del contrato que tenía preparado y me dijo:

–Leelo y fijate en qué partes no estás de acuerdo. Cambiá lo que quieras y traémelo cuando puedas. Yo lo voy a firmar ni bien lo tengas listo.

–Un momento –dije yo–. ¿Qué pasa si no estás de acuerdo con las modificaciones que yo haga?

–No importa. Yo voy a firmar el contrato de cualquier manera, cambies lo que cambies.

Me quedé perplejo. Por segunda vez. La primera fue cuando Carlos aceptó tan rápido que el libro figurara en Internet, sin condiciones.

Obviamente, después de lo que había escuchado no me iba a llevar el contrato; no debía (ni quería) leerlo.

–Aquí está, entonces –le dije–. ¿Dónde tengo que firmar?

–¿No lo vas a leer? –me preguntó él.

–No. Si vos estás dispuesto a firmar cualquier cosa que yo corrija, entonces yo estoy dispuesto a firmar cualquier cosa que figure aquí. Sin leer.

Carlos se sonrió y desde ese momento se transformó en uno de mis mejores amigos.

Ésta es la historia que precede al primer libro. Hoy, usted tiene en sus manos el tercero de esta saga. Y Carlos, aunque usted no lo pueda creer, ya me propuso que escriba un cuarto.

Eso sí, ninguno de nosotros pudo imaginar lo que iba a pasar. De hecho, la editorial imprimió 3.000 (tres mil) ejemplares como primera edición del tomo 1. En cambio, imprimió 40.000 (cuarenta mil)



de la primera edición del tomo 2. O sea, yo no sabía lo que iba a pasar, pero ellos tampoco.

Estos libros no tienen (casi) material inédito. Muy pocas cosas son ideas mías. La mayor parte está expuesta en múltiples lugares en la literatura dedicada a la matemática desde hace siglos. En todo caso, lo que sí me pertenece son:

- a) Mis opiniones, que obviamente son personales. Son discutibles, como cualquier opinión. Lo único que puedo decir es que escribí lo que pienso después de más de cuarenta años de *comunicar matemática*. No me autoriza –ni mucho menos– a tener razón. Sólo me autoriza a tener una opinión. No pienso ahora lo mismo que hace veinte años, pero hace veinte años no había escrito estos libros.
- b) La selección de los problemas. No tengo ninguna razón en particular para decir por qué sí a algunos y por qué no (por ahora) a otros (como el caso de los números de Fibonacci, por poner un ejemplo). Son decisiones anárquicas, que espero poder corregir con el tiempo. En todo caso, escribo sobre lo que me gusta, me atrapa y me hace/hizo pensar. A eso lo invito: a que piense.
- c) La *forma* de la comunicación. Si bien la gran mayoría de los textos son conocidos desde hace muchísimos años (en algunos casos siglos), los escribí de acuerdo con lo que creo que es una buena manera para que se entiendan. Me peleé mucho con lo que escribo y no siempre gano, pero lo intento. Eso sí: si usted no entiende algo de alguno de los problemas que va a leer, es *siempre* mi culpa. Significa que en algún lugar yo tampoco entendí. No puede ser que usted lea algo (contando –por supuesto– con que le está prestando atención al texto) y no lo comprenda. Algo hice mal yo.
- d) También son mías las anécdotas e historias de vida. De hecho, son el corazón del libro. Yo no soy un locutor que *vende* un producto sin importarle si es bueno o malo. Si hay algo que

figura en alguno de estos libros, es porque a mí me interesó y me gustó. No podría seducirla/o con algo que a mí no me hubiera cautivado.

Este tercer tomo podría ser, en realidad, el primero o el segundo. Las historias y los problemas son intercambiables. Con todo, quiero enfatizar algo: toda persona que sepa leer y escribir (*y pensar*) está en condiciones de enfrentar todas y cada una de las secciones y/o problemas que presenta el libro. No importa la edad, no importa la experiencia: sólo hay tener ganas de pensar.

Obviamente, los problemas tienen distintos grados de dificultad. Pero mi experiencia me indica que lo que a algunas personas les resulta difícil, a otras les puede parecer obvio. Y viceversa. La matemática está diseminada a lo largo del libro en cada cuento, en cada problema, en cada historia. Usted puede empezar por donde quiera, yo sólo le voy a dar un consejo (si me puedo permitir semejante cosa): diviértase, disfrútelo, aun cuando alguna propuesta no le salga. El hecho de que *no pueda resolver un problema* no significa nada. Al contrario: aproveche para tenerlo en la cabeza, para entretenerse cuando tenga tiempo. Es como tener un buen libro esperando en casa, o una buena película que uno quiere ver, o una buena comida que uno quiere comer. De eso se trata. De poder aprender a disfrutarlo.

Por último, una reflexión. Algo tiene que haber cambiado en la sociedad. Me explico: hace casi veinte años, en febrero de 1988, el periodista (y amigo personal) Carlos Ulanovsky era uno de los jefes de editoriales del diario *Clarín*. Me llamó y me propuso lo siguiente: “Adrián, ¿por qué no escribís por qué habría que estudiar matemática? Escribí sobre para qué sirve, para qué te sirvió a vos... Conveneme de que me estoy perdiendo algo”.

Lo hice. La nota salió publicada el miércoles 3 de febrero de 1988. Ulanovsky la tituló: “En defensa de las Matemáticas”. Salió en las dos páginas centrales del diario, y empezaba así: “Matemática.. ¿estás ahí? (igual que el título de los libros, casi una premonición). No. Me estoy poniendo las preguntas...”.

¿Por qué cuento esta historia? Porque la nota pasó inadvertida en el diario más importante del país. Y si alguien la advirtió, yo no me enteré. Contenía varios de los ejemplos que figuran en los dos primeros tomos de esta colección. Pero no me llamó Carlos al día siguiente para decirme que quienes dirigían el diario querían que empezara a escribir con regularidad sobre esos temas, ni me dijo que ninguna persona hubiera llamado al diario para pedir más. No me ofreció un contrato como columnista.

Es decir que, si hubiera sabido que los libros iban a tener una respuesta como la que *ustedes* dieron a los dos primeros tomos, los habría escrito hace veinte años. Y no lo hice. Porque no sabía. Más aún: todavía hoy, no lo creo.

Eso sí: gracias.

## ¿Ya se sabe “todo” en matemática?

Es curioso, pero es tal la desconexión entre la sociedad y la matemática que la mayoría de la gente piensa (con razón, porque éstos son los elementos con los que cuenta) que la matemática “está toda inventada” o que es algo “cuadrado” que uno va, estudia, y *no* aplica, salvo en contadísimas ocasiones (suma, resta, división y multiplicación incluidas).

Sin embargo, no sólo *no* es así, sino que la matemática anda por la vida como la mayoría de las ciencias: sabiendo algunas cosas (pocas), e ignorando otras (muchas). El siguiente recorrido no pretende ser exhaustivo ni mucho menos original. Más aún: aparece en casi todos los “prólogos” de libros dedicados a la difusión de la matemática. Pero, si lo que usted llegó a cursar hasta completar (con suerte) fue el colegio secundario, lo invito a que reflexione sobre lo que va a leer (si es que no se aburrió ya).

Se trata de una historia que quiero empezar así: “Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aun aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a lo que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía ya hace cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan *aburridas e inexplicables*. Peor aún: de difícil aplicación”.

Sin embargo, estoy convencido de que uno puede aspirar a más. Sígame en este recorrido apresurado sobre lo que pasó en los últimos siglos.

- 1) La matemática del siglo XVII produce un quiebre esencial: la aparición del cálculo, con el aporte casi simultáneo de dos científicos que se odiaron mientras vivieron. Me refiero al inglés Isaac Newton y al alemán Gottfried Leibniz. Más allá de las disputas personales, ambos coinventaron la noción de límite y, con ello, floreció el cálculo y/o el análisis. Esto significó el desarrollo de la física matemática, de la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y del conocimiento de la naturaleza de la materia.
- 2) Luego Georg Cantor con su teoría sobre los conjuntos infinitos irrumpe sobre el final del siglo XIX y continúa hasta principios del siglo pasado, creando en algún sentido un paraíso para la investigación en matemática. Cantor terminó poco menos que loco y vilipendiado por una comunidad que no lo comprendió.

Aquí, una pausa: en general, en los programas de matemática de los colegios secundarios, las teorías de Newton-Leibniz, de Cantor, los aportes de Gauss, Fermat y Euler *no* se estudian. Ése es un pecado que necesitamos corregir. Y lo antes posible.

- 3) Con el advenimiento del siglo XX, justo en el año 1900, David Hilbert enuncia en París, en el marco del Congreso Internacional de Matemática, los 23 problemas más importantes de la matemática que aún no tenían solución.<sup>1</sup> Con esto desafió al mundo –matemático, obviamente– e invitó a la comunidad científica a “arremangarse” y tratar de producir resultados. Hilbert dijo: “Tenemos que saber y vamos a saber”. Estas palabras son las que están escritas en su tumba en Göttingen.
- 4) Nuevas ramas, como la topología, nacieron de la geometría y del análisis, y dominaron la investigación en matemática

<sup>1</sup> Fueron los problemas más importantes para Hilbert. Algunos se resolvieron fácilmente al poco tiempo, y obviamente varios adquirieron celebridad por haber sido formulados por él en ese congreso.

durante muchísimo tiempo. Se produjo también la enfática irrupción de las “Probabilidades y estadísticas”, muy ligadas a la teoría de conjuntos, las funciones que se llaman “medibles” y las “teorías de integración”.

- 5) Los últimos dos matemáticos universalistas fueron Gauss y Poincaré. Es que hace un siglo era posible imaginar que un extraordinario matemático pudiera *manejar* todo lo que se sabía de su especialidad en el mundo. Pero eso hoy no puede pasar. Otra vez, no sólo es improbable, sino casi “imposible”. La cantidad de matemáticos en el mundo se ha multiplicado por miles. Más aún: se publican también miles de revistas de variadas especialidades en más de 100 idiomas. El volumen del conocimiento ha llegado a límites para el asombro. Se estima que se producen más de 200.000 nuevas teoremas por año, lo cual significa unos 600 teoremas nuevos ipor día!
- 6) El 24 de mayo del año 2000, en el College de Francia, en París, el Clay Mathematics Institute, que tiene su base en Cambridge, Massachusetts, hizo algo parecido a lo que produjo Hilbert cien años antes: eligió siete problemas sin solución aún y los llamó Millenium Prize Problems (los Premios a los problemas del milenio). La idea fue publicitar los problemas y ofrecer *un millón de dólares* a quien pudiera resolver alguno de ellos. Justamente, éstos son los problemas que hoy están en la *frontera* del conocimiento.
- 7) Hace muy poco, en agosto de 2006, el ruso Grigori Yakovlevich Perelman sorprendió al mundo cuando anunció que había resuelto la famosa Conjetura de Poincaré. Perelman se negó a retirar su premio, sin embargo, la comunidad matemática le confirió la medalla Fields (equivalente al Premio Nobel). Perelman también se negó a retirar este premio y en la actualidad se encuentra recluso en su ciudad de origen, San Petersburgo, en Rusia.

¿Quién dijo que se sabía “todo”? El solo hecho de que “aceptemos” esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la “matemática real”, la que investiga porque *no sabe*, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que *mostrar*, la que hay que sugerir. Y creo que ya es hora de empezar.

## La matemática tiene sus problemas

### Dos pintores y una pieza<sup>2</sup>

En una casa hay una habitación grande que hay que pintar. Un pintor, llamémoslo A, tarda 4 horas en pintarla solo. El otro, a quien llamaremos B, tarda 2 horas.

¿Cuánto tardarían si los dos se pusieran a pintarla juntos?  
(Antes de avanzar: la respuesta no es 3 horas.)

### ¿Da lo mismo subir que bajar un 40%?

Algunas preguntas sobre porcentajes.

1. Si uno empieza con un número cualquiera, digamos 100, y le quita el 40%, y al resultado lo incrementa un 40%, ¿se llega otra vez a 100?
2. Al revés ahora: si uno empieza con el número 100, le agrega un 40%, y al resultado le descuenta ahora un 40%, ¿se llega otra vez a 100?
3. Las respuestas que dio para las dos preguntas anteriores, ¿dependieron de que empezara con el número 100, o habría dado lo mismo si hubiera empezado con cualquier otro número?

<sup>2</sup> Las respuestas a los problemas las encontrará en el capítulo “Soluciones” (pp. 181-237).

4. Y las respuestas que dio para las dos primeras preguntas, ¿dependieron de que fuera un 40%, o habría dado lo mismo con cualquier otro porcentaje?
5. Si uno incrementa un número en el 100% y luego descuenta el 100%, ¿se tiene el mismo número con el que empezó? Y al revés, si uno descuenta el 100% y luego lo aumenta, ¿qué obtiene?

### Problema de los seis fósforos

Se tienen seis fósforos iguales. ¿Es posible construir con ellos cuatro triángulos equiláteros cuyos lados sean iguales al largo del fósforo?

Nota 1: No conteste rápido si no se le ocurre la solución. Piense.

Nota 2: Triángulo equilátero quiere decir que tiene *los tres lados iguales*. De hecho, “equi” = “igual”, “látero” = lado. En este caso, lados iguales y, además, de igual longitud que la del fósforo.

### ¿Cómo hacer para pesar diez kilos con una balanza desbalanceada?<sup>3</sup>

Mucha gente cree que tiene mala suerte y lo expresa de distintas maneras. Por ejemplo: “El día que llueva sopa, yo voy a estar con un tenedor en la mano”. O algo equivalente. El hecho es que si Murphy viviera, diría que uno siempre tiene un destornillador cuando necesita un martillo (o al revés). Pero con el tiempo y con paciencia, al final, nos ingeniamos para salir del paso.

Es posible que usted *nunca* tenga que enfrentar el problema que viene a continuación. Sin embargo, estoy seguro de que, el haber pensado en cómo resolverlo, *lo ayudará* a tener una llave extra en su arsenal, que uno *nunca sabe* cuándo necesitará utilizar.

<sup>3</sup> Este problema fue publicado por A. K. Peters en 2004, en el libro *Puzzles 101*.

Supongamos que tiene que pesar *exactamente* diez kilos de azúcar. Para lograrlo, se tienen dos pesas de cinco kilos cada una, y una balanza con dos platillos.

La dificultad reside en que la balanza está *desbalanceada*. Esto significa que, sin que haya ningún peso en ninguno de los dos platillos, hay uno que está más arriba que el otro.

¿Cómo hacer?

### Los tres recipientes con dos tipos de monedas que tienen las etiquetas cambiadas

Supongamos que tiene tres recipientes iguales que contienen monedas. Y no se puede ver lo que hay en el interior de cada uno.

Lo que sí se puede ver es que en la parte de *afuera* de cada recipiente hay pegada una etiqueta.

Una dice: “Monedas de 10 centavos”.

Otra dice: “Monedas de 5 centavos”.

Y la tercera dice: “Mezcla”.

Un señor que pasó por el lugar antes que usted, despegó *todas* las etiquetas que había y las puso, a propósito, en recipientes que *no correspondían*. ¿Alcanza con elegir *una sola moneda de un solo recipiente* para tener suficiente información para reordenar las etiquetas y poner cada una en el lugar que le corresponde?

### Las cuatro mujeres y el puente

El problema que sigue se inscribe entre los llamados de “pensamiento lateral”. En realidad, son problemas sencillos de enunciar, pero cuya solución aparece como resbaladiza. Lo curioso es que no bien uno la encuentra no puede entender cómo no se le ocurrió antes. Y la dificultad consiste en que uno “empuja” para ir en una dirección (aunque no lo advierte) que luego resulta equivocada (cosa que uno “tampoco” advierte). Créame que vale la pena pensarlo.

El problema que sigue requiere planificar una estrategia. No es difícil, pero tampoco trivial. Eso sí: no tiene trampas. Es un ejercicio muy conocido en el mundo de los que juegan a planificar e inventar caminos donde, en apariencia, no los hay. Y tiene el atractivo extra de que permite entrenar al cerebro. Acá va:

Hay cuatro mujeres que necesitan cruzar un puente. Las cuatro empiezan del mismo lado del puente. Sólo tienen 17 (diecisiete) minutos para llegar al otro lado. Es de noche y sólo tienen una linterna. No pueden cruzar más de dos de ellas al mismo tiempo, y cada vez que hay una (o dos) que cruzan el puente, necesitan llevar la linterna. Siempre.

La linterna tiene que ser transportada por cada grupo que cruza en cualquier dirección. No se puede “arrojar” de una costa hasta la otra. Eso sí: como las mujeres caminan a velocidades diferentes, cuando dos de ellas viajan juntas por el puente, lo hacen a la velocidad de la que va más lento.

Los datos que faltan son los siguientes:

Mujer 1: tarda 1 (un) minuto en cruzar

Mujer 2: tarda 2 (dos) minutos en cruzar

Mujer 3: tarda 5 (cinco) minutos en cruzar

Mujer 4: tarda 10 (diez) minutos en cruzar

Por ejemplo, si las mujeres 1 y 3 cruzaran de un lado al otro, tardarían 5 minutos en hacer el recorrido. Luego, si la mujer 3 retorna con la linterna, en total habrán usado 10 minutos en cubrir el trayecto.

Con estos elementos, ¿qué estrategia tienen que usar las mujeres para poder pasar todas –en 17 minutos– de un lado del río al otro?

### Problema de las 10 monedas

Se tienen 10 monedas arriba de una mesa.

¿Es posible distribuirlas en cinco segmentos, de manera tal que queden *exactamente cuatro* en cada uno de ellos?

Si se puede, exhiba una forma de hacerlo. Si no se puede, explique por qué.

### Cuatro interruptores

Hace un tiempo presenté un problema que involucra lo que se llama el “pensamiento lateral”. Por las características que tenía, lo llamé “Problema de los tres interruptores”. Obviamente no es algo que inventé (ni mucho menos), pero me pareció que, de todos los que conocía al respecto, *ése* era el más atractivo. De hecho, en varias charlas que tuve con grupos de jóvenes de distintas edades y también con gente dedicada a la docencia y divulgación de la matemática, recibí de parte de todos muy buenos comentarios.

Ahora quiero contar una anécdota e incorporar un grado de “dificultad” más al problema de los interruptores. El día que apareció en la contratapa del diario *Página/12* el problema de los tres interruptores, se me acercó Fernando Kornblit, un matemático argentino que trabaja en el INTI, y me dijo: “Adrián, muy interesante el problema de los interruptores, pero estuve pensando que *también tiene solución si en lugar de tres interruptores hubiera cuatro*”.

Le pedí que nos dejara pensar un rato, y eso es lo que le estoy proponiendo acá: que lo piense también. Sólo para refrescar las ideas, recuerdo el problema original que apareció publicado en *Matemática... ¿Estás ahí?* (Episodio 1):

Se tiene una habitación vacía, salvo porque hay colgada desde el techo una bombita de luz. El interruptor que activa la luz se encuentra en la parte exterior de la pieza. Es más: no sólo hay un interruptor, sino que hay tres iguales, indistinguibles. Uno sabe que sólo una de las “llaves” activa la luz (y que la luz funciona, naturalmente).

El problema consiste en lo siguiente: la puerta de la habitación está cerrada. Uno tiene el tiempo que quiera para “jugar” con los interruptores. Puede hacer cualquier combinación que quiera con ellos, pero puede entrar en la pieza sólo una vez. En el momento de salir, uno debe estar en condiciones de poder decir: “Ésta es la llave que

activa la luz". Los tres interruptores son iguales y están los tres en la misma posición: la de "apagado".

A los efectos de aclarar aún más: mientras la puerta está cerrada y uno está afuera, puede entretenerse con los interruptores tanto como quiera. Pero habrá un momento en que decidirá entrar en la pieza. No hay problema. Uno lo hace. Pero cuando sale, tiene que poder contestar la pregunta de cuál de los tres interruptores es el que activa la lamparita. Una vez más, el problema no esconde trampas. No es que se vea por debajo de la puerta, ni que haya una ventana que da al exterior y que le permita ver qué es lo que pasa adentro, nada de eso. El problema se puede resolver sin golpes bajos.

Hasta acá, el problema conocido. El agregado entonces es: si en lugar de haber *tres* interruptores, hay *cuatro*, ¿se puede encontrar la solución también entrando en la pieza una sola vez?

Ahora, otra vez (afortunadamente) le toca a usted.

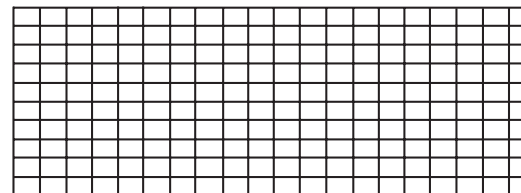
### Problema de las ocho monedas

El siguiente problema invita, *una vez más*, a pensar un rato. Lo que puedo decir es que *hay una solución*, que *no es muy complicada*, pero que requiere analizar y evaluar las distintas posibilidades. Y para eso hace falta un poco de concentración. Nada más. Nada menos. Acá va.

Se tienen ocho monedas en apariencia iguales, aunque se sabe que una de ellas es más liviana que las otras siete. Además, hay una balanza con dos platillos y lo único que se puede hacer con ellos es poner monedas a uno y otro lado, y pesar solamente *dos* veces. Luego de esas dos pesadas, se supone que uno tiene que estar en condiciones de poder decir cuál es la moneda diferente (más liviana).

### Problema de la barra de chocolate

Supongamos que le doy una barra de chocolate que tiene forma de rectángulo. Esta barra tiene divisiones: 10 a lo largo y 20 a lo ancho



(como muestra la figura). Es decir, en total, si uno partiera la barra, tendría 200 (doscientos) trozos de chocolate iguales.

La pregunta es: ¿cuál es el número *mínimo* de divisiones que hay que hacer para obtener los 200 bloquitos?

Detalle: no importa el orden, ni el tamaño. Sólo se pregunta cuál es la forma más eficiente de cortar el chocolate (se supone que uno corta por el lugar donde figuran las divisiones).

El problema en sí mismo parece irrelevante. De hecho, lo parece *porque lo es*. Pero lo que no resulta irrelevante es advertir que, en la búsqueda de la solución, uno tuvo que imaginar diferentes situaciones. Quizá no le sirvieron para este ejemplo en particular, pero son caminos por los que uno, o bien ya anduvo, o bien los acaba de generar en su cerebro. ¿Cómo sabemos, o mejor dicho, cómo sabe usted que no va a utilizar en algún momento algo de lo que acaba de pensar? Más aún: ¿cómo sabe que algo que *hoy* tuvo que descartar no le va a servir mañana para algo que *hoy* no puede imaginar? Tener este tipo de problemas permite entrenar el cerebro y estimular la imaginación. Nada más. Nada menos.

### Un cambio en la rutina

El siguiente problema fue seleccionado por Martin Gardner<sup>4</sup> como uno de los que más le gustaron por su sencillez y profundidad.

<sup>4</sup> Vale la pena recordar que Martin Gardner nació en 1914 en Tulsa, Oklahoma, Estados Unidos, y es uno de los más prolíficos y brillantes escritores y difusores de la matemática creativa que conoció el siglo xx. Su actividad se prolonga aún

Después de leerlo, y eventualmente resolverlo, quedarán algunas reflexiones, pero la más importante tendría que ser: ¿cuántas veces en la vida cotidiana creemos estar ante un problema que, o bien no tiene solución, o bien creemos que nos faltan datos para resolverlo?

Éste es un magnífico ejemplo para poner a prueba, *no* el ingenio (cuya definición me resulta muy resbaladiza), sino la capacidad para pensar *desde otro lugar*. Ahora, basta de generalidades. Acá va el planteo.

Un comerciante viaja a su trabajo todos los días usando el mismo tren, que sale de la misma estación y que tiene los mismos horarios, tanto de ida como de vuelta. Para colaborar con él, su mujer lo lleva a la mañana hasta la estación y luego lo pasa a buscar a las 5 de la tarde con su coche, de manera tal de ahorrarle un viaje en colectivo.

Para el problema, lo importante es que la mujer lo encuentra todos los días a la misma hora, a las 5 de la tarde, y juntos viajan a su casa.

Un día, el marido termina su trabajo más temprano y toma un viaje previo que lo deposita en la estación a las 4 de la tarde (en lugar de las 5, como es habitual). Como el día está muy lindo, en vez de llamar a la mujer para contarle lo que hizo, decide empezar a caminar por la calle que usa ella para ir a buscarlo. Se encuentran en el trayecto, como él había previsto. El marido se sube al auto y juntos vuelven a su domicilio, al que llegan 10 minutos antes que lo habitual.

Si uno supone la situación ideal (e irreal también) de que:

- a) la mujer viaja siempre a la misma velocidad;
- b) sale siempre a la misma hora de la casa para ir a buscar a su compañero;
- c) el hombre se sube al auto en forma instantánea y sin perder tiempo;

---

hoy, a punto de cumplir los noventa y tres años. Las columnas que escribió durante veinticinco años en la revista *Scientific American* se transformaron en un clásico de la literatura dedicada a este campo. Es considerado por una abrumadora mayoría, el verdadero "gurú" de la especialidad.

d) nunca aparece nada extraño en el camino, ni semáforos que dilaten o aceleren el tránsito, etcétera.

¿Puede usted determinar cuánto tiempo caminó el marido cuando ella lo encontró?

Hasta aquí el planteo. Un par de reflexiones antes de pasar a la solución.

Como se da cuenta, el problema en sí mismo es una verdadera pavada. La belleza consiste en que no hay que utilizar ninguna herramienta sofisticada, ni ningún recurso extraordinario. Sólo hay que pensar, y para eso, usted decide cuándo y cómo lo hace. Lo único que le pido es que me crea que vale la pena.

Dicho esto, me queda un par de observaciones más. Luego de pensarlo un rato, uno empieza a sospechar que al problema le faltan datos. Por ejemplo, que falta saber:

- a) la velocidad a la que caminaba el marido;
- b) la velocidad a la que manejaba la mujer;
- c) la distancia entre el domicilio y la estación.

Y seguramente habrá más cosas que usted pensó que me olvidé de poner aquí. No. No se necesita más nada. O sea, siga sola/o con lo que tiene, que es suficiente. La única concesión que me tiene que hacer es aceptar que las condiciones son ideales, en el sentido de que el hombre no pierde tiempo cuando sube al auto, que el auto gira en forma instantánea para ir de una dirección a la otra, que la mujer sale siempre a la misma hora para buscar al marido, etcétera.

## Dos tías y dos colectivos

El ejercicio que sigue casi genera un problema familiar. De hecho, es antiintuitivo y, si uno no lo piensa bien, supone que hay algo que funciona muy mal o que hay trampa. Sin embargo, es una cuestión de lógica.



Un muchacho, llamémoslo Juan, vive sobre una avenida de doble mano. Juan tiene *dos* tías. Saliendo de su casa, una tía vive a la izquierda y la otra, hacia la derecha. Ambas viven bastante lejos: para ir a la casa de cualquiera de ellas Juan tiene que tomar un colectivo.

Juan quiere mucho a ambas tías, y las quiere por igual, y ellas a su vez quieren que él las vaya a visitar seguido. Por suerte (para Juan) hay dos líneas de colectivos que pasan justo por la casa de él y tienen paradas exactamente frente a su puerta. Sin embargo, las líneas van en direcciones contrarias. La línea *roja* va hacia la derecha, mientras que la *azul*, hacia la izquierda.

Las dos líneas pasan por la casa de Juan *exactamente* cada 10 minutos. Nunca se atrasan. Siempre, cada 10 minutos un colectivo rojo y otro azul. Claro, los colectivos no tienen por qué pasar a la misma hora. Puede ser el caso de que el azul pase a la “hora en punto”, a las “y 10”, “y 20”, “y 30”, “y 40” e “y 50”, mientras que el rojo pasa “a las y 5”, “y 15”, “y 25”, “y 35”, “y 45” e “y 55”. Pero el hecho es que los colectivos *nunca* llegan fuera de hora.

Con esta distribución de los colectivos Juan quiere ser equitativo con sus tías y les propone lo siguiente:

–Hagamos una cosa –les dice–. Cuando yo vaya a visitar a alguna de ustedes, voy a salir a la calle y esperar el primer colectivo que venga. Si es rojo, lo tomo y visito a la que vive a la derecha, y si es azul, visito a la otra tía.

Las tías escuchan atentas, y hasta aquí no ven nada raro ni les parece mal la propuesta. Juan agrega:

–Eso sí. No voy a salir a esperar el colectivo siempre a la misma hora. Voy a salir a una hora aleatoria (o sea, a cualquier hora que me venga bien) y tomo el primer colectivo que pase.

Las tías asintieron, demostrando su conformidad con el acuerdo.

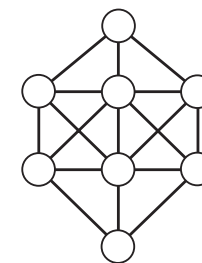
Sin embargo, con el paso del tiempo, Juan visitaba mucho más a una tía que a la otra. Ante el reclamo de la tía menos visitada, Juan aseguró enfáticamente que él cumplía con lo pactado.

El problema consiste en explicar por qué sucede esto, sin suponer que hay alguna trampa, del estilo “Juan no podía cruzar la calle cuando venía el colectivo que iba para...”, o “Juan mintió y cuando viene

el colectivo azul lo deja pasar y espera el rojo”, o “Juan no cumple con su palabra y sale siempre a la misma hora”. No. No hay trampas, no hay trucos. Es sencillamente un problema que se resuelve usando un poco de lógica. Y un papel, lapicera en mano y tiempo.<sup>5</sup>

### Ocho números conectados

Se tiene el siguiente dibujo:



El objetivo del problema es distribuir los primeros ocho números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) en los círculos indicados en el dibujo, de manera tal de que no haya ningún par de números *consecutivos* unidos por un segmento. ¿Se podrá? ¿O no?

Muchas veces en la vida cotidiana uno tiene un problema pero *no sabe* si tiene solución. Lo que tiene, entonces, es *un* problema para resolver, pero además, y mucho más importante, uno no sabe si el problema tiene solución. Lo cual representa otro problema.

Es muy común en los colegios que a uno le planteen un problema, pero *le advierten* que *tiene solución*, o *se infiere del contexto*. Ningún profesor o maestro pone en una prueba ejercicios para resolver

<sup>5</sup> Este problema me lo envió Maxi Combina, estudiante de Ciencias de la Computación en la Universidad Nacional de Córdoba. Luego de acordar con él, me tomé la libertad de hacerle algunas modificaciones (pequeñas, por cierto) y agregarle la solución.

cuya solución no conozca. Muy diferente... *muy diferente...* es no saber si cuando uno busca y no encuentra es porque no existe o porque intentó mal, o no tuvo suerte, o eligió el camino equivocado.

La tentación que tengo es, entonces, plantear el problema de arriba y preguntar si tiene solución o no. Claro, en caso de que alguien diga que no tiene solución, tendrá que *demostrarlo*. Es decir, no alcanzará con que diga que intentó mucho tiempo y no la encontró. Eso no prueba nada. O en todo caso, sí. Prueba que usted intentó mucho. Pero nada más. Podría venir otra persona y resolverlo. En cambio, si usted pudiera *probar* que el problema no tiene solución, entonces será indistinto el tiempo que uno le dedique, o la persona de que se trate. No existiría solución y, por lo tanto, no se la podría encontrar.

Por otro lado, si uno dice que *tiene solución*, debería poder exhibirla. O, en todo caso, *demostrar* que sabemos que tiene solución ofreciendo argumentos.

Lo dejo (por un rato) con la pregunta. Y me llevo la respuesta para el final.

## Problemas de Fermi

Se llaman así los problemas que involucran alguna *estimación* para poder llegar a la respuesta. Deben su nombre a Enrico Fermi, premio Nobel de Física.<sup>6</sup> No se pretende que uno conteste *con exactitud*, ni con *precisión extrema*. Se trata de *estimar un número*. Hay muchos ejemplos muy conocidos y sólo elijo uno entre ellos: ¿cuántos afinadores de piano hay en la ciudad de Boston?

<sup>6</sup> Enrico Fermi fue un físico italiano que vivió entre 1901 y 1954. Sus contribuciones más importantes fueron en el campo de la física nuclear y la teoría cuántica: le entregaron el Premio Nobel de Física por su contribución al desarrollo de la energía nuclear. Sin embargo, no bien recibió el premio, Fermi fue forzado a dejar Italia y se convirtió en un activo investigador en la Universidad de Chicago.

Actualmente, uno de los laboratorios de física más importantes del mundo lleva el nombre de Fermi Lab (cerca de Chicago).

Fermi fue miembro del equipo que se conoció con el nombre de Proyecto Manhattan, y que desarrolló la bomba atómica en Los Álamos, Nuevo México.

Obviamente, nadie aspira a que, frente a esta pregunta, el interlocutor conteste con un número *exacto*. Sin embargo, *sí* se pretende que quien responda no diga 50 si son 10.000, pero tampoco que diga 10.000 si son 50. Se trata entonces, por un lado, de *estimar* una respuesta, pero aún más importante, *el proceso* que involucra.

El ejemplo que me ocupa acá es el siguiente. Supongamos que se va a jugar un partido de fútbol en la cancha de River (para elegir un estadio grande, en el que entran aproximadamente 70.000 personas, pero el ejemplo se puede adaptar a cualquier país o a cualquier ciudad o cualquier equipo). Supongamos además que el estadio va a estar *repleto* de gente. Si uno trajera suficientes pelotas de fútbol (infladas) y las distribuyera por el campo de juego (sin encimarlas) hasta ocuparlo por completo, ¿alcanzarán para que al finalizar el partido se le pueda entregar una pelota a cada espectador?

Una vez planteado el problema, lo dejo para que consiga los datos que le hagan falta, ya sean las *dimensiones* de una pelota así como las de una cancha de fútbol. Pero, más allá de los datos que le pudieran faltar, no se olvide de que se trata de una estimación.

Algo más antes de pensar el problema: ¿se anima a dar una respuesta *aun antes* de hacer ninguna cuenta? ¿Qué le parece que va a pasar? ¿Alcanzarán o no?

## Otro problema de Fermi

Con la misma idea de las pelotas en una cancha de fútbol, supongamos ahora que ponemos cada pelota dentro de una caja cúbica (en donde entra casi exactamente una pelota), y luego ubicamos estas cajas en un camión, de manera tal que cada camión puede transportar 20 contenedores de un metro cúbico cada uno. ¿Cuántos camiones hacen falta para transportar todas las pelotas?

Como antes, se trata de una estimación. No se pretende una respuesta perfecta.

\* \* \*

Las preguntas que uno puede *formularse* con la idea de *entrenarse* son muchísimas y, por supuesto, dependerá de la creatividad de cada uno para cuestionar o de la habilidad para buscar en Internet o en los libros sobre el tema.<sup>7</sup> Propongo aquí algunas:

- 1) Si usted pusiera billetes de 2 pesos en una columna, hasta que pudiera alcanzar la *deuda externa argentina*, ¿cuán alta le parece que sería esa *pila* de billetes? ¿Cuánto le parece que pesaría? ¿Cuál sería la presión sobre el piso en el que se apoya?
- 2) ¿Cuántos pelos tiene usted en la cabeza? ¿A qué velocidad cree que crece el cabello en un humano? ¿Cuántas células le parece que tiene nuestro organismo?
- 3) ¿Cuántos cuadros cree que tiene un *dibujito animado* de Walt Disney?
- 4) ¿Cuántos kilómetros habrá de carreteras en la Argentina? ¿Cuál será el volumen de todos los lagos?

### Problema de la montaña

El siguiente problema es ciertamente fascinante. Si uno lo quiere abordar en forma directa, creo que se enfrentará con múltiples complicaciones. En cambio, si puede ingeniárselas para pensarlo desde otros ángulos, es un problema no sólo sencillo sino verdaderamente fácil.

Aquí va: una persona está al pie de una montaña. La montaña tiene un solo camino hacia la cumbre. El señor decide escalarla y sale a las cero hora del día lunes (o sea, a la medianoche del domingo). No importa la velocidad a la que asciende ni lo que hace en el trayecto (incluso puede parar o bajar, si quiere), pero lo que se sabe es

<sup>7</sup> Algunas fuentes consultadas son: <http://www.physics.umd.edu/perg/fermi/fermi.htm#General>; <http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/sheila3.html>; <http://www.soinc.org/events/fermiq/fermiguide.htm>; [http://www.vendian.org/envelope/dir0/fermi\\_questions.html](http://www.vendian.org/envelope/dir0/fermi_questions.html); <http://www.physics.odu.edu/~weinstei/wag.html>

que 24 horas más tarde el señor estará en la cumbre. O sea, a la medianoche del lunes *seguro* que llegó a lo más alto.

Ahora bien: una vez arriba, se queda un tiempo allí (no importa cuánto), digamos seis días, y exactamente a la medianoche del siguiente domingo, o sea las cero hora del lunes, comienza el descenso. Igual que antes, no importa de qué forma camina hacia abajo (por la única ruta que existe) y, como la semana anterior, si para para descansar, o subir un poco... En definitiva, es libre de hacer lo que quiera. Pero, lo que sí se sabe, una vez más, es que a la medianoche del lunes, 24 horas más tarde, ya estará abajo.

El problema consiste en lo siguiente: probar que existe al menos un lugar en donde el hombre estuvo a la misma hora, tanto al subir como al bajar.

Lo planteo de otra forma. Convéznase de que no importa cómo haya hecho para subir o para bajar, tiene que haber al menos un lugar en el camino que une la base con la cima, por la que el señor pasó en el mismo horario tanto a la ida como a la vuelta.

Por ejemplo, si el señor recorriera la mitad del trayecto en 12 horas, eso significaría que a las 12 del mediodía estará en el mismo lugar al subir que al bajar. Obviamente, esto es solo un ejemplo, ya que como el hombre tiene total libertad para la ida como para la vuelta, no tiene por qué recorrer la mitad del trayecto en 12 horas.

### Ocho reinas

El problema de las *ocho reinas* consiste en saber si es posible ubicar en un tablero de ajedrez ocho reinas (no importa el color, naturalmente), de manera tal que ninguna de ellas pueda atacar a las restantes.

Una reina, en el ajedrez, gobierna lo que sucede en la fila y la columna en las que está ubicada, además de las diagonales.

Algunas de las preguntas que surgen son:

- a) ¿Es posible encontrar una configuración de manera tal que *ninguna pueda "atacar" a ninguna?*

- b) Si existe tal configuración, ¿cuántas hay?  
 c) ¿Hay algún método para construir configuraciones?

Este problema fue planteado originariamente a fines del siglo XIX por Max Bezzel, un ajedrecista de la época, y fue *abordado por muchísimos matemáticos*, entre otros, por Gauss, Gunther y Glaisher. Antes de avanzar, lo invito a que piense sola/o si tiene o no solución.

Pero más aún. Supongamos por un momento que usted es capaz de encontrar alguna. ¿Qué sucedería si rota el tablero 90 grados? (Piense la respuesta.) Sigo yo: ¿no estaría encontrando una nueva solución? Ahora que le sugerí que se podía rotar 90 grados, ¿qué otros movimientos podría hacer para obtener otros resultados? Por supuesto, rotar 90 grados es uno de ellos, pero rotar 180 y 270, también. Y no termina ahí. Supongamos que usted hiciera reflejar en un espejo una solución, ¿no encontraría otra? ¿Será alguna de las anteriores? ¿Y si rota la nueva que obtiene así? ¿Cuántos resultados esencialmente distintos se encontrarán con ese mecanismo?

A todas estas operaciones (rotaciones y reflexiones), los matemáticos las llamamos operaciones de simetría. En definitiva, es razonable pensar que, si uno tiene dos soluciones pero puede llegar empezando en una y, luego de rotar y/o reflejar, llegar a la otra, entonces se trata –en esencia– de la misma solución.

Vuelvo a las preguntas iniciales: ¿cuántas soluciones posibles hay, genuinamente diferentes?<sup>8</sup>

## El cronómetro y las infinitas monedas

La mejor manera de desafiar la intuición, provocar al cerebro, entrar en conflicto con la lógica, es plantear un problema que involucre al *infinito*. O mejor dicho, que involucre a conjuntos infinitos. Al mismo

<sup>8</sup> Hay numerosa literatura escrita para este problema. En Internet, hay algunos sitios atractivos:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Eight\\_queens\\_puzzle](http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle)  
<http://bridges.canterbury.ac.nz/features/eight.html>

tiempo, estos casos suelen activar una catarata de respuestas contradictorias, de debates internos que muestran, una vez más, la riqueza de nuestro intelecto, al que no siempre aprovechamos ni entrenamos.

Le propongo, entonces, pensar lo siguiente: supongamos que usted tiene *infinitas monedas*. (Sí, ya sé: infinitas monedas NO HAY, pero éste es un problema que requiere “estirar” la imaginación hasta ese lugar... ¿se anima?) Supongamos que en una habitación está usted con un amigo y que entre los dos tienen *infinitas monedas*. Como las monedas son todas iguales (digamos de 1 peso), ustedes les pusieron un “número” a cada una y las ordenaron en forma creciente (o sea, primero el número 1, luego el 2, el 3, etc.). Además, en la habitación hay:

- a) una caja enorme (en donde uno de ustedes va a empezar a colocarlas), y  
 b) un cronómetro.

El proceso que va a empezar ahora es el siguiente: yo hago arrancar el cronómetro, que empieza en la posición 0 y dará una vuelta hasta llegar a cubrir 60 segundos (1 minuto). Usted tiene 30 segundos para colocar en la caja las monedas numeradas del 1 al 10. Una vez hecho esto, su amigo retira la moneda que lleva el número 1. Ahora, les quedan sólo 30 segundos en el reloj y nos empezamos a apurar. En la mitad del tiempo que les queda, o sea, en los siguientes 15 segundos, usted coloca en la caja las monedas del 11 al 20 y, rápidamente, su amigo retira de la caja la moneda que lleva el número 2. Ahora quedan 15 segundos antes de que se cumpla el minuto. En la mitad de ese tiempo (o sea, 7 segundos y medio), usted tiene que colocar en la caja las monedas numeradas del 21 al 30, y su amigo retirará de la caja la moneda número 3.

Y así continúa el proceso indefinidamente: usted usa la mitad del tiempo que queda hasta completar el minuto para ir colocando diez monedas por vez en la caja, y su amigo va retirando (en forma ordenada) una por vez. Por ejemplo, y para ratificar que entendimos el proceso, en el próximo paso, en la mitad del tiempo que queda

(3 segundos y tres cuarto) usted coloca en la caja las monedas numeradas del 31 al 40 y su amigo retira la moneda número 4.

Creo que se entiende el procedimiento. En cada paso, usamos la mitad del tiempo que nos queda para ir colocando, sucesivamente –y en forma *ordenada*–, 10 monedas y sacando también en forma consecutiva la moneda con el número más chico. Obviamente, a medida que va avanzando el cronómetro y se va acercando a cumplir con el minuto pautado, tenemos que apurarnos cada vez más. La idea es ir reduciendo el tiempo a la mitad para colocar 10 monedas y retirar 1.

La pregunta que tengo para hacer es la siguiente: una vez terminado el tiempo (o sea, cuando expiraron los 60 segundos), ¿cuántas monedas hay en la caja?

### Las hormigas y Alicia<sup>9</sup>

En una barra de un metro de longitud hay 100 hormigas *anónimas* (en el sentido de que son indistinguibles unas de otras). Además, hay una hormiga diferente, que llamamos Alicia. Ella es la hormiga número 101 del problema. Para distinguirla aún más, Alicia está parada exactamente en la mitad de la barra. Todas las hormigas caminan a la misma velocidad: *un metro por minuto* (incluida Alicia). Algunas caminan para un lado y otras, para el otro. Pero la regla que siguen es la siguiente: cuando dos hormigas chocan, ambas dan la vuelta y salen caminando en el sentido contrario al que traían.

Por supuesto, antes de plantear un par de preguntas posibles, me adelanto a decir que todo es ficticio y que haremos de cuenta que las hormigas no tienen espesor y que cada una ocupa un solo punto de la barra sobre la que está caminando. Es decir, son condiciones ideales.

Inicialmente, todas las hormigas están quietas, pero van a salir caminando en *alguna* dirección, *todas* al mismo tiempo.

<sup>9</sup> Estos problemas me los contó Matías Graña, profesor del Departamento de Matemática de Exactas (UBA), quien es además amigo personal.

Hechas estas observaciones, paso a formular las preguntas:

- Si en los bordes de la barra no hay nada que las detenga, es decir que cada vez que una de las hormigas llega a cualquiera de los bordes se cae, entonces: ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir, desde el momento en que empiezan a caminar, para estar *seguros de* que se cayeron todas?
- Si, en cambio, en cada uno de los bordes del palo hay una madera, de manera tal que, cada vez que una hormiga *choca* contra esa pared, da la vuelta y camina en la dirección contraria, ¿es posible hacer una distribución de las 100 hormigas restantes para garantizar que Alicia, que empieza en el medio de la barra, al cabo de un minuto *termina otra vez en el medio* de la barra?
- Pregunta *extra*: ¿cuántas distribuciones posibles se pueden encontrar de las 100 hormigas para que Alicia termine, después del minuto, otra vez en el medio de la barra?

### Dos preguntas (en una)

#### PREGUNTA 1

Supongamos que usted tiene un tablero de ajedrez, el clásico de 8 x 8 cuadraditos. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar usando los lados de esos cuadrados?

Por ejemplo, un cuadrado a considerar es *todo el tablero*, que es el único que hay de 8 x 8. Pero hay otros... La pregunta es cuántos.

#### PREGUNTA 2

Ahora, enfrentemos el caso más general. Si en lugar de considerar un tablero de ajedrez de 8 x 8, tuviéramos un tablero *cuadrado* de  $n \times n$ , donde  $n$  es un número natural cualquiera. En este caso: ¿cuántos cuadrados se podrían construir?

## El acolchado cuadrado

Este problema fue propuesto por Henry Dudeney en 1917.

Vamos a suponer que usted tiene un acolchado que forma un *cuadrado* y que está compuesto por 169 cuadraditos (figura 1).

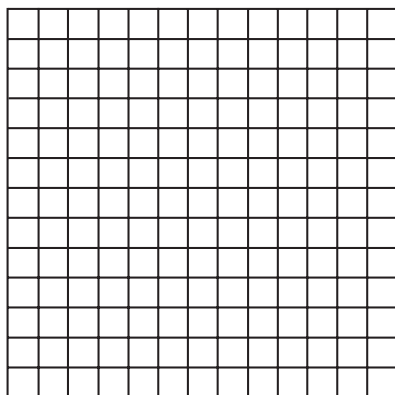


Figura 1

Uno podría pensar este acolchado como un *gran cuadrado de 13 x 13*. O también, como un acolchado compuesto por 169 “cuadraditos”. Pero el objetivo es encontrar la menor cantidad de *cuadrados* posibles en los que se pueda partir el cuadrado grande (es decir, de tamaño estrictamente menor que 13 x 13), y exhibir las formas en las que se puede armar nuevamente. Por ejemplo: supongamos que uno tiene un cuadrado de 3 x 3. Por supuesto, podría *partirlo* en cuadraditos de 1 x 1 y tendría *nueve* de esos cuadrados. Pero esa partición es mala, en el sentido de que uno puede encontrar una mejor. Por ejemplo, tomar un cuadrado de 2 x 2 y luego *cinco* cuadraditos de 1 x 1 (como se ve en la figura 2). Eso da un total de *seis* cuadraditos.

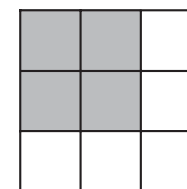


Figura 2

Vuelvo al problema original: el objetivo es encontrar el mínimo número de cuadrados en los que se pueda partir el acolchado grande de 13 x 13. Obviamente, se excluye el caso 13 x 13, ya que, si no, habría uno solo: ¡el original! Piénselo y luego, en todo caso, verifique qué solución encontró. Si me permite, le hago una sugerencia: empiece como hice yo, con acolchados de 3 x 3 (hasta que se convenza bien del ejemplo), luego siga con acolchados de 4 x 4, de 5 x 5, etc., hasta que desarrolle una intuición de qué es lo que habría que hacer. No empiece directamente con el de 13 x 13, porque es más complicado.

## ¿Siempre hay puntos “antipodales” en la Tierra que tienen la misma temperatura?

Desafío: yo le aseguro que siempre hay dos puntos en el planeta (Tierra) ubicados exactamente en las antípodas, en donde la temperatura *es exactamente igual*. ¿Cómo se puede demostrar esto?

Como siempre, la idea es que piense por su cuenta y trate de plantearse el problema primero; leerlo, meditar sobre él, reflexionar sobre si se entiende o no, y luego, pensar en alguna potencial solución. Ah, y no encontrarla no significa nada, como tampoco significa nada encontrarla. Eso sí: todo el recorrido sí significa... y mucho.

### DEMOSTRACIÓN

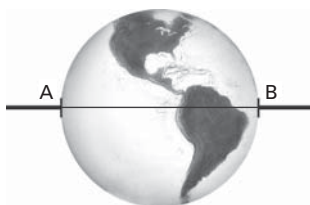
Le propongo que construyamos juntos dos puntos *antipodales*, es decir, dos puntos que estén en lados opuestos de la Tierra (si bien quizás oyó que Buenos Aires y Tokio son antipodales, en realidad, si uno se fija en un mapa, se va a dar cuenta de que no es exactamente así).

No importa. Lo que quiero es que nos pongamos de acuerdo sobre cómo construir dos puntos que *sí* estén en las antípodas.

Supongamos que usted está mirando la Tierra, y “ve” los paralelos y los meridianos. Fíjese en el “ecuador” (o sea, el *más grande* de todos los paralelos).<sup>10</sup> Tome un punto cualquiera allí. Imagine que lo pincha con un palito que atraviesa la Tierra en forma horizontal (suponiendo que está sosteniendo la esfera con el polo norte “arriba” y el polo sur “abajo”), y lo hace aparecer del otro lado. Allí, al salir, vuelve a encontrar otro punto del ecuador. Ese otro punto, está justamente en las antípodas (también llamados puntos antipodales).

(Como se advierte hay, además, una cantidad *infinita* de pares antipodales. Es decir, para cada punto que elija sobre el ecuador, del “otro lado” existe el punto antipodal al que eligió.)

Voy a llamar a esos dos puntos A y B:



¿Qué podría pasar con respecto a las temperaturas en ambos puntos? Si en esos dos lugares la temperatura fuera igual, o sea, si

$$A = B$$

<sup>10</sup> En realidad, sirve cualquier *círculo máximo*. Imagine a la Tierra como si fuera una pelota de tenis. Téngala en la mano, haciéndole una marca en el “equivalente” del polo norte y otra en el que sería, imaginariamente, el polo sur. Si ahora coloca una banda elástica o un piolín que enrolle a la pelota de tenis y que pase por esas dos marcas, eso es un círculo máximo. Claro, usted puede hacer *girar* la pelotita, y tomarla de otra forma. Entonces, habrá dos *nuevos polos norte y sur*. Como se ve, habrá *nuevos círculos máximos* que son los círculos que pasan por esas dos nuevas marcas. En definitiva, lo que se observa es que hay infinitos círculos máximos, y son aquellos que sirven para *envolver* a la Tierra (o a la pelotita de tenis) pero que tienen la *mayor longitud posible*. Ésos son los círculos máximos.

Listo, se terminó el problema: hemos encontrado los puntos que buscábamos.

Ahora, supongamos que no fuera así. Es decir, la temperatura en los dos puntos no es la misma. Entonces, en uno de los dos la temperatura es mayor. Digamos que en A es mayor que en B (o sea, que en A hace más calor que en B), y lo denominó así:

$$A > B$$

Esto también puede expresarse de otra forma, diciendo que la diferencia de temperaturas entre ambos puntos es positiva. Es decir que, si uno resta la temperatura de los dos lugares, obtiene un número positivo.

$$(A - B) > 0$$

Para fijar las ideas (aunque no sea necesario), supongamos que en A hay 35 grados de temperatura y en B, 20. Entonces la diferencia de temperaturas entre ambos puntos es de 15 grados ( $35 - 20 = 15$ ).

¿Qué estará pasando al mismo tiempo en los otros puntos antipodales que están sobre el ecuador? Quiero probar que hay al menos un par de puntos antipodales que en ese momento tienen la misma temperatura.

Imaginariamente, supongamos que uno hace girar el palito que tiene en una punta a A y en la otra a B. Le recuerdo que el palito pasa siempre por el centro de la Tierra, y tiene las dos puntas apoyadas en el ecuador. Ahora, volvamos a pensar en la diferencia de las temperaturas entre los dos puntos finales del “palito”. ¿Qué puede pasar con esa diferencia de temperatura entre esos dos puntos? Sabemos que  $(A - B) > 0$  (en realidad, en el ejemplo que estábamos considerando la diferencia de temperaturas era de 15 grados). Al movernos y estudiar los cambios de temperatura en los extremos del palito, la diferencia puede seguir siendo positiva, o puede pasar a ser negativa, o incluso puede valer cero.

Analicemos cada caso.

- a) Si al detenernos en otro par de puntos (ambos antipodales) la diferencia es cero, entonces allí hemos encontrado lo que queríamos: las temperaturas en ambos puntos *es la misma*.
- b) Ahora lo invito a pensar conmigo. Si cuando nos detenemos la diferencia entre las temperaturas de los dos puntos dejó de ser positiva y pasó a ser negativa, eso significa que en algún momento del proceso... ituvo que haber pasado por cero! Y eso es lo que queremos. En ese instante hemos encontrado los dos puntos antipodales con temperaturas iguales.<sup>11</sup>
- c) ¿Puede ser que siempre se mantenga la diferencia de temperaturas positiva? No, la respuesta es no, ya que si diéramos una vuelta de 180 grados con el palito, y llegáramos con el punto A hasta el B (y a su vez, el B llegara a ser A), esa diferencia ahora tendría que cambiar, y pasaría a ser negativa (en el ejemplo que elegí, la diferencia es de 15 grados). Luego, en algún momento, esa diferencia *tuvo que haber sido nula*. Y eso es lo que buscamos.

Eso demuestra que inexorablemente siempre hay sobre la Tierra dos puntos antipodales en donde la temperatura es la misma. Y para eso, hace falta usar matemática. De hecho, el teorema que se usa se conoce con el nombre de Teorema del valor intermedio para funciones continuas, y la temperatura *es* una función continua.

<sup>11</sup> Piense que la temperatura varía *continuamente al movernos*. Por ejemplo: si usted está parado en la puerta de su casa y allí la temperatura es de 20 grados, y su hermana, que vive a 10 cuadras, está también parada en la puerta de la casa de ella, pero allí la temperatura es de 18 grados, entonces, en algún lugar entre su casa y la de su hermana la temperatura tiene que ser de 19 grados, y 19 y medio también. Y 18 grados 3 décimas también. (¿Entiende por qué?) Es decir, la temperatura no puede *saltar* de un lugar a otro. Al ir caminando, la temperatura irá variando y para pasar de 20 a 18, tendrá que recorrer todas las posibles temperaturas intermedias. Esto es lo que quise decir cuando escribí que la temperatura varía continuamente, o sea, no pega saltos.

## Ramo de rosas de distintos colores

Veamos ahora dos tipos diferentes de problemas con los que uno se encuentra en la matemática.

Una categoría de problemas la conforman aquellos de los cuales uno sabe (de alguna forma) que tienen solución, y el objetivo es tratar de encontrarla.

Otra categoría –muy diferente– la integran aquellos de los cuales uno *ignora* si tienen solución o no. Por supuesto, el problema se resuelve, o bien mostrando que la “supuesta” solución no puede existir, o bien demostrando que existe y, eventualmente, encontrándola. Una cosa es tropezarse con un problema *sabiendo que tiene* una solución (la dificultad reside en que uno sea capaz de encontrarla) y otra muy distinta tener un problema delante y no saber si se puede resolver siquiera. La vida cotidiana, justamente, está repleta de estas últimas situaciones. En general, las primeras aparecen en los momentos en los que uno estudia o se entrena, pero cuando aparece un problema en la vida real, por lo general no viene con un aviso de que la solución existe. De ahí que la aventura del descubrimiento sea tan apasionante.

Veamos un ejemplo:

Un florista le entregó a un señor un ramo de flores que contenía *rosas* de distintos colores: *rojas, azules y blancas*. Pasó un par de días y el señor, como no había pagado, volvió al local y preguntó cuánto debía, teniendo en cuenta que cada color de rosa tenía un precio diferente.

El florista había perdido el papel en donde había anotado todos los datos, pero recordaba algunos. En principio, sabía que había puesto al menos dos rosas de cada color. Y además, podía afirmar que:

- a) Había *100 rosas* si uno sumaba las *rojas* y las *blancas*;
- b) había *53 rosas* si uno sumaba las *blancas* y las *azules*, y
- c) si uno sumaba las *azules* y las *rojas*, *había estrictamente menos que 53 flores*.



¿Es posible con estos datos decidir *cuántas flores había de cada color?*

La respuesta la va a encontrar en el apartado de las soluciones, pero quiero hacer antes una observación. Obviamente, éste no es un ejemplo de la vida cotidiana. No se me escapa que, si un florista pierde un papel en donde tenía anotado las particularidades del ramo, es muy poco probable que recuerde datos, como pasa en este caso... Pero vale la pena pensarlo porque uno, al final, se acostumbra a recorrer ciertos caminos, y cuando los necesita porque aparecen en alguna otra situación de la vida, sabe que tiene *el recurso de usar esta herramienta tan potente*, como es la de poder *pensar*. Y de eso se trata.

## Números y matemática

### Menos por menos es más... ¿Seguro?

Una de las “verdades” que nos *enseñan* en la escuela o en el colegio es que

“Menos por menos es más”.

Uno anota. Piensa. No entiende. Vuelve a pensar. Sigue sin entender. Mira al compañero de al lado. Él tampoco entiende. Y de pronto se oye a la maestra o el profesor, que otra vez nos taladran con:

“Menos por menos es más”.

Uno tiene varias alternativas frente a esto. La más probable es que *bloquee la mente*, deje el cuerpo en el lugar, escriba como un autómata, pero en realidad ya nada más de lo que se oiga o se lea en esa habitación va a convocar su atención, al menos por un rato.

–¿Qué dijo? –dice uno preocupado.

–Dijo algo así como que... *menos por menos, es más* –contesta el compañero del banco de al lado.

–No entiendo –contesta el primero.

–Yo tampoco –dice el otro, pero al menos éste pudo repetir lo que había oído.

Entonces uno levanta la vista y ve en el pizarrón escrito:

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(-3) \cdot (-2) &= 6 \\ (-7) \cdot (-3) &= 21 \\ (-15) \cdot (-1) &= 15\end{aligned}$$

Y un poco más abajo, uno advierte con horror que incluso se aplica a fracciones!

$$\begin{aligned}(-1/2) \cdot (-6) &= 3 \\ (-9) \cdot (-2/3) &= 6 \\ (-2/5) \cdot (-3/4) &= 3/10\end{aligned}$$

El pizarrón escupe números, símbolos, igualdades, letras que invitan a abandonar todo y escapar. ¿De qué habla esta persona? Pero uno no tiene más remedio que aceptar. En la escuela o el colegio, acepta porque en general no se enseña con espíritu crítico (con las excepciones correspondientes), sin embargo aquí cabe preguntarse inmediatamente: ¿por qué?

De todas formas, el tiempo pasa, y uno termina aceptando el axioma (o lo que *parece* como un axioma o verdad absoluta) de que menos por menos *es* más, porque:

- no le queda más remedio,
- no se contraponen con nada de lo que uno ya sabe,
- uno nunca necesitó usarlo en la vida cotidiana,
- cierto o falso, no me afecta, y, por último,
- no me interesa

Mi idea es tratar de encontrar alguna explicación de por qué es cierto que menos por menos *tiene* que ser más.

#### CASO 1

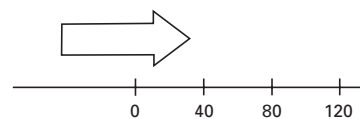
Supongamos que está manejando su auto a 40 kilómetros por hora. Si le preguntara dónde va a estar dentro de 3 horas, usted con-

testará: “Voy a estar a 120 kilómetros de acá”. Éste sería un ejemplo de que “más por más, *es* más”. O sea, aunque uno no escriba los símbolos (+) adelante, es como si estuviera diciendo:

$$(+40) \cdot (+3) = (+120)$$

Uno representa los 40 kilómetros por hora, con (+40) y lo que “va a pasar” dentro de 3 horas, con (+3). Multiplica y tiene (+120), o sea, uno estará 120 kilómetros más adelante de donde está ahora.

En una figura se ve así:



Si ahora, en lugar de ir a 40 kilómetros por hora hacia adelante, empezara a manejar su auto *marcha atrás* a la misma velocidad (o sea, a 40 kilómetros por hora pero hacia atrás), podría preguntarle: ¿dónde va a estar dentro de 3 horas?

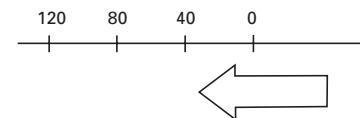
$$(-40) \cdot (+3) = (-120)$$

Otra vez, si uno quiere representar *en símbolos* que está yendo marcha atrás, lo que hace es escribir

$$(-40)$$

Por otro lado, como uno quiere saber, otra vez, “qué va a pasar dentro de 3 horas”, usa el número (+3) para representarlo.

En una figura se ve así:



Es decir, si uno maneja el auto hacia atrás a 40 kilómetros por hora, dentro de 3 horas va a estar 120 kilómetros atrás del lugar del que partió. Esto corresponde –espero que se entienda con el ejemplo– a que menos por más *es* menos.

Ahora bien, lleguemos entonces a la última pregunta (que le pido que lea con cuidado y, sobre todo, que piense sola/o la respuesta).

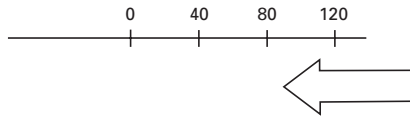
“Si usted viene como recién, manejando su auto a 40 kilómetros *marcha atrás* y yo, en lugar de preguntarle dónde va a estar *dentro de 3 horas*, le preguntara, *¿dónde estaba hace 3 horas?* Usted, ¿qué contestaría? (Por favor, más allá de responder, trate de convencerse de que me entendió la pregunta). Ahora sigo yo: la respuesta es que uno estaba *imás adelante!* Más aún: estaba 120 kilómetros *más adelante* de donde está ahora.

Si sigo usando los símbolos de más arriba, tengo que escribir:

$$(-40) \cdot (-3) = 120$$

Es decir, escribo  $(-40)$  porque estoy yendo *marcha atrás*, y escribo  $(-3)$  porque pregunto qué pasó hace 3 horas. Y como se advierte, uno, hace 3 horas estaba 120 kilómetros más adelante del punto donde está ahora. Y eso explica –en este caso– por qué menos por menos *es* más.

En el dibujo es:



Luego, en este caso, se ve que *imenos por menos es más!*<sup>12</sup>

<sup>12</sup> Esta forma de representar gráficamente que *menos por menos es más* me la contó el doctor Baldomero Rubio Segovia, uno de mis grandes amigos de la vida y uno de los mejores matemáticos que dio España, ex decano de la Universidad Complutense de Madrid, y actual profesor en esa casa de estudios.

¿Es verdad que  $0,99999\dots = 1$ ?<sup>13</sup>

Está claro que

$$x = 0,9999\dots (*)$$

es un número real. Por otro lado, el número 1 también es un número real. ¿Qué relación hay entre ambos? Veamos.

Multiplicando (\*) por 10 de ambos lados, se tiene:

$$\begin{array}{r} 10x = 9,99999\dots \\ - \quad x = 0,99999\dots \text{ y ahora, resto} \\ \hline 9x = 9 \end{array}$$

Luego, dividiendo por 9 en ambos términos, se tiene:

$$x = 1 \quad (**)$$

Comparando (\*) con (\*\*), se concluye que

$$0,99999\dots = 1$$

Lo que esto sugiere es que el número 1 admite dos escrituras distintas, pero, obviamente, es un solo número.

La invitación al lector es que trate de descubrir que éste no es el único caso dentro del conjunto de números reales, sino que sucede con infinitos otros casos. ¿Puede dar algunos ejemplos?

## Patrones y bellezas matemáticas

La matemática ofrece (también) muchas curiosidades, entre las que se encuentran ciertas simetrías y patrones de extraña belleza.

<sup>13</sup> Entendemos por  $0,99999\dots$  al número racional que resulta de escribir un 0 y luego *infinitos* números 9 después de la coma.

¿Está todo “ordenado” y sólo lo descubrimos? ¿O lo inventamos nosotros?

Aquí van algunos ejemplos.<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} 1 \cdot 8 + 1 &= 9 \\ 12 \cdot 8 + 2 &= 98 \\ 123 \cdot 8 + 3 &= 987 \\ 1.234 \cdot 8 + 4 &= 9.876 \\ 12.345 \cdot 8 + 5 &= 98.765 \\ 123.456 \cdot 8 + 6 &= 987.654 \\ 1.234.567 \cdot 8 + 7 &= 9.876.543 \\ 12.345.678 \cdot 8 + 8 &= 98.765.432 \\ 123.456.789 \cdot 8 + 9 &= 987.654.321 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\ 12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\ 123 \cdot 9 + 4 &= 1.111 \\ 1234 \cdot 9 + 5 &= 11.111 \\ 12.345 \cdot 9 + 6 &= 111.111 \\ 123.456 \cdot 9 + 7 &= 1.111.111 \\ 1.234.567 \cdot 9 + 8 &= 11.111.111 \\ 12.345.678 \cdot 9 + 9 &= 111.111.111 \\ 123.456.789 \cdot 9 + 10 &= 1.111.111.111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\ 98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\ 987 \cdot 9 + 5 &= 8.888 \\ 9.876 \cdot 9 + 4 &= 88.888 \\ 98.765 \cdot 9 + 3 &= 888.888 \\ 987.654 \cdot 9 + 2 &= 8.888.888 \\ 9.876.543 \cdot 9 + 1 &= 88.888.888 \\ 98.765.432 \cdot 9 + 0 &= 888.888.888 \end{aligned}$$

<sup>14</sup> Todos los ejemplos fueron enviados por Cristian Czubara, en el afán que ponen todos por compartir lo que saben y les gusta.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \\ 11 \cdot 11 &= 121 \\ 111 \cdot 111 &= 12.321 \\ 1.111 \cdot 1.111 &= 1.234.321 \\ 11.111 \cdot 11.111 &= 123.454.321 \\ 111.111 \cdot 111.111 &= 12.345.654.321 \\ 1.111.111 \cdot 1.111.111 &= 1.234.567.654.321 \\ 11.111.111 \cdot 11.111.111 &= 123.456.787.654.321 \\ 111.111.111 \cdot 111.111.111 &= 12.345.678.987.654.321 \end{aligned}$$

### Velocidad del crecimiento del pelo

Piense en la última vez que se cortó el pelo. ¿Hace cuánto fue? ¿Cuánto más largo tiene el pelo ahora? En mi caso personal, me lo corté hace un mes y ahora (después de haberlo medido, aunque usted no lo crea) el pelo está *1,5 centímetros* más largo. Con esta información, usted puede estimar la velocidad de crecimiento diario (aproximada, claro está). ¿Quiere hacer la cuenta sola/solo?

En todo caso, acá va la solución: como en treinta días creció 1,5 centímetros, o sea 15 milímetros, cada día, en promedio, el pelo creció medio milímetro. Es decir, el pelo de una persona normal crece –en forma aproximada, claro– 1 centímetro cada tres semanas.

### Combinatoria y reproductor de CD

Supongamos que tiene un reproductor de CD que viene con un botón que permite “programar” el orden en el que va a escuchar las canciones. Es decir, en lugar de reproducirlas tal como vienen grabadas, las reproduce en el orden que usted elige, hasta agotarlas todas. Por ejemplo, supongamos que inserta un CD con 10 canciones. Usted podría seleccionar:

$$3-7-10-1-9-5-8-6-4-2 \quad \text{o} \quad 10-9-8-7-6-5-4-3-2-1,$$

por poner sólo dos casos.

Ahora, planteo un problema: si a usted le gustara mucho su CD y decidiera programar “un ordenamiento” diferente cada día, hasta agotar todos los posibles “órdenes”, ¿cuántos días tardaría en recorrerlos todos? Es decir, ¿cuántos días tendrán que pasar para que no le quede más remedio que repetir alguno anterior?

Usted puede, naturalmente, ir más abajo y leer la respuesta. Pero se privará del placer de pensar el problema (y por otro lado, ¿dónde está la gracia?). El planteo es muy sencillo, y muy “posible” como situación de la vida real. El resultado es notable y no necesariamente “esperable”.

Antes de pasar a la solución, lo invito a que pensemos algo juntos. Si tuviera los números 1, 2 y 3, ¿de cuántas formas los puede ordenar? Piense una manera de “contar” sin necesidad de escribir *todas* las formas. La lista completa sería:

123, 132, 213, 231, 312, 321 (\*)

O sea que uno descubre que son *seis formas*. Pero esto es muy fácil, porque son pocos números. Por ejemplo, si tuviera diez números o veinte (por poner un ejemplo) se haría mucho más tedioso escribir todos los casos y lo más probable es que uno termine equivocándose porque son muchos casos a considerar. La idea es buscar alguna forma que permita *contar* sin tener que hacer una *lista*. Por ejemplo, aprovechando los datos que acabo de escribir en (\*) pensemos juntos cómo hacer si hubiera *cuatro* números en lugar de tres. Podríamos poner al número 4 delante de los seis elementos de la lista (\*). Tendríamos entonces esta nueva lista:

4123, 4132, 4213, 4231, 4312 y 4321

Lo único que hice fue *agregar* el número 4 al principio de cada integrante de la lista (\*). Vuelvo a tener 6 formas. Esto no agota todas las posibilidades. Lo que tenemos que hacer ahora es intercalar el número 4 en el *segundo lugar* de cada integrante de la lista (\*). En ese caso, queda:

1423, 1432, 2413, 2431, 3412 y 3421

O sea, otras *seis formas*.

Ya se habrá dado cuenta de lo que hay que seguir haciendo (si no, piénselo solo/a hasta advertir cómo seguir).

Ahora, intercalemos el número 4 en la tercera posición de la lista (\*). Se tiene entonces lo siguiente:

1243, 1342, 2143, 2341, 3142 y 3241

Y por último, ubicamos el número 4 *al final* de todos los miembros de la lista (\*):

1234, 1324, 2134, 2314, 3124 y 3214

Y se terminó. Es decir, hemos *agotado* todas las posibilidades. Al número 4 lo hemos ubicado en todos los lugares y, como vimos, se trató de *reproducir* la lista original (\*) cuatro veces. Y como había en total *seis elementos en la lista* (\*), al multiplicarlo por 4, tenemos 24 posibilidades.

4123, 4132, 4213, 4231, 4312 y 4321  
 1423, 1432, 2413, 2431, 3412 y 3421 (\*\*)  
 1243, 1342, 2143, 2341, 3142 y 3241  
 1234, 1324, 2134, 2314, 3124 y 3214

Si ahora apareciera un *quinto número*, lo que habría que hacer es intercalar el número 5 en todas las posiciones de la lista (\*\*), por lo que obtendríamos 5 veces la lista de 24 que ya teníamos. O sea,  $24 \times 5 = 120$  maneras.

Si consideramos que

con 3 números hay  $3 \cdot 2 = 6$  formas,  
 con 4 números,  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  formas,  
 con 5 números,  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$  formas, etc...

Uno puede inferir que con 10 números habrá:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3.628.800 \text{ formas}$$

Visto de esta manera, ¿le ayuda a resolver el problema original? Es decir, ¿el problema del “reproductor de CD”?

### Una curiosidad más sobre los infinitos (y el cuidado que hay que tener con ellos)

Supongamos que uno tiene una suma infinita de números, expresada de la siguiente forma:

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots \quad (*)$$

Es decir: se *suma* 1, y luego se *resta* 1, sin detenerse nunca. Por supuesto, si usted se está cuestionando en este momento *qué quiere decir el número A*, créame que la/lo entiendo. Yo tampoco sé lo que quiere decir. Pero, en todo caso, *si existiera*, fíjese qué cosas curiosas que pasarían.

a) Agrupemos los números de la derecha en (\*) de la siguiente forma:

$$A = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

En este caso, el *número A* debería ser 0, ya que todos los paréntesis *suman* 0. Luego se tendría:

$$A = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

Y por lo tanto  $A = 0$  sería la conclusión.

b) Por otro lado, agrupemos los números de la derecha en (\*) de otra forma (y sígame en el razonamiento):

$$A = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \quad (**)$$

Lo que hice fue agrupar los términos de manera diferente y usé:

$$-1 + 1 = +(-1 + 1)$$

Ahora, cada paréntesis en (\*\*) suma 0 otra vez, y por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

$$A = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \dots = 1$$

Luego,  $A = 1$

Por último, vuelvo a la ecuación (\*) y agrupo los términos de *otra* forma.

$$A = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) \quad (***)$$

(Es decir, agrupo todos los términos a partir del segundo, y el signo menos que figura adelante del paréntesis garantiza que todos los términos que quedan adentro aparezcan con el mismo signo que tenían al comienzo.)

Luego, si uno mira lo que queda dentro del paréntesis en (\*\*\*), advierte que queda exactamente  $A$  otra vez. Es decir, en (\*\*\*) se tiene:

$$A = 1 - A$$

O sea, pasando  $A$  del segundo miembro al primero, se tiene:

$$2A = 1$$

Luego, se concluye que

$$A = (1/2)$$

¿Qué aprendemos con todo esto? La primera consecuencia es que el número  $A$  no existe o, lo que es lo mismo, la suma (\*) que uno supone que da un número  $A$ , no puede existir, porque el número  $A$  tendría que ser igual a  $0$ ,  $1$  y/o  $1/2$  (un medio).

La segunda conclusión es que, al operar con sumas infinitas, se debe tener mucho cuidado porque las propiedades asociativas y conmutativas que valen para las sumas finitas, no necesariamente valen en el caso infinito.

En realidad, todo esto tiene que ver con lo que se llama estudio de la convergencia de las series numéricas y sus propiedades, para lo que sugiero consultar cualquier libro de análisis matemático.

## Don Quijote de la Mancha<sup>15</sup>

Don Quijote de la Mancha fue escrito por Miguel de Cervantes Saavedra en 1605. Es una de las obras más espectaculares de la literatura universal. Se lo encuentra en casi todas las librerías del mundo en los idiomas más insólitos, sobre todo si uno tiene en cuenta que fue escrito en castellano hace más de cuatrocientos años. Hace muy poco, fue descubierto en un lugar inimaginable. Acompáñeme y verá que no sólo encontraron a Don Quijote, sino algunos otros libros escondidos en un sitio totalmente impredecible.

Quiero hacer una pequeña *digresión* e inmediatamente vuelvo al tema del Don Quijote. Lo único que se necesita es conseguir (imaginariamente) una vara de un metro de largo (puede ser un metro como el que usan para medir los ingenieros o carpinteros, o uno como el de las costureras). En un punto (en el extremo izquierdo) está marcado

<sup>15</sup> El crédito total de la idea de este artículo le corresponde al doctor Pablo Coll y a Pablo Milrud, matemáticos y amigos. Ellos fueron quienes me acercaron un texto con buena parte de lo que figura más arriba y me sugirieron el tema del Quijote como ejemplo para usar. Más aún: sin ellos, esta nota no existiría.

el número  $0$ , y en otro punto, en el extremo derecho, está marcado el número  $1$ . Está claro que el punto medio, donde figura el número  $50$ , representa una distancia desde la punta izquierda de  $50$  centímetros, o lo que es lo mismo,  $0,50$  metro ( $1/2$  metro). De la misma forma, si uno midiera  $1/3 = 0,3333\dots$  centímetros desde la izquierda, encontraría otro punto del metro en cuestión que corresponderá a una tercera parte de la vara que estamos usando. Como se advierte, lo que estoy tratando de hacer es describir lo obvio: a cada punto del metro o varilla que hubiéramos elegido, le corresponde un número. Ese número, lo que marca, es la distancia al  $0$ . De esta forma, estamos tranquilos en cuanto a que hemos logrado hacer una *doble asignación*, entre los números que son mayores que  $0$  y menores que  $1$ , y los puntos de la vara.

Ahora es cuando se pone interesante. Vamos a ponerle un número a cada letra del alfabeto, y lo vamos a hacer en orden. Es decir:

A la letra $a$ le corresponde el número	01
A la letra $b$ le corresponde el número	02
A la letra $c$ le corresponde el número	03 ...
...A la letra $r$ le corresponde el número	19
A la letra $s$ le corresponde el número	20,

y para terminar, a la letra  $z$  le corresponde el número  $27$ . Al final, agregamos un número para que represente un lugar en blanco, o un espacio. A éste le asignamos el número  $28$ .

La *tablita* completa es la siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Veamos algún ejemplo: si quisiera escribir la palabra *libro*, usando las asignaciones que acabo de establecer, se tiene el siguiente número:

0,1209021916

Esto resulta de que

L	corresponde	12
I	corresponde	09
B	corresponde	02
R	corresponde	19
O	corresponde	16

Por eso, al poner todos los números juntos (con la precaución de ponerlos después de la coma, ya que todos los números tienen que estar entre 0 y 1) se tiene:

0,1209021916

Al revés, el número 0,011907051421091401 corresponde a la palabra *Argentina*.

Y el número

0,102220210903090128201603090112

representa a las palabras “justicia social” (el número 28 que aparece en el recorrido, es el que indica el espacio entre las dos palabras).

Ahora vuelvo a Don Quijote, ya que está todo preparado para dar *el salto*. Si una persona trae un ejemplar de Don Quijote de la Mancha, uno puede entonces hacer la conversión de cada una de las palabras usando la tablita que figura más arriba. O sea, se le asigna a cada letra que aparece en el libro el número que le corresponde (lo mismo que a los espacios)... y así sigue hasta llegar al final. Obviamente, queda un número con una *enorme cantidad de dígitos*.

Como Cervantes escribió... “En un lugar de la Mancha...”, el número empieza con:

0,051428221428122207011928040528120128130114030801...

y sigue...

Es más, sigue *todo el libro*. Sin embargo, lo importante a los efectos de lo que estoy haciendo es que este número *termina* en algún lugar. Y más aún: ese número, de acuerdo con lo que hicimos más arriba, corresponde a algún punto de la vara de un metro que teníamos. Y es un punto *único* en la vara.

¿Qué moraleja podemos sacar? *Ese* punto, y ningún otro de la vara, es el Quijote.

Por supuesto, no sólo Don Quijote es un punto de la varilla. En realidad, podemos usar este procedimiento con cualquier libro que se hubiera escrito hasta acá –que son muchísimos, pero no infinitos–, y lo que podemos afirmar es que cada uno de ellos tiene asociado algún punto del segmento o de la vara. Es más: allí están también todos los libros que se vayan a escribir en la historia!

Todos estos *puntos o números* de la vara que corresponden a libros escritos (o por escribirse) son números *racionales*, o sea, son cocientes de dos números enteros.<sup>16</sup>

Si todos los libros escritos (o por escribirse) representan números racionales (y ni siquiera todos los racionales, ni mucho menos)... si los excluyéramos de la vara, si los sacáramos a todos, ino se notarían los huecos que generarían, ya que los otros, los irracionales, son muchísimos más!

<sup>16</sup> Nota 1: en realidad, como todos los libros que se escribieron y/o por escribirse “terminan” en alguna parte, significa que, a partir de un momento, el número racional que los determina tendrá período 0 en alguna parte, y por lo tanto, en el denominador sólo habrá potencias de 2 y de 5, ya que, por ejemplo, nunca podrá ser como 1/3 o 1/9, que si bien son racionales, terminan en 0,33333333... o bien 0,111111...

Nota 2: recuerdo aquí que los números racionales son aquellos cuyo desarrollo decimal o bien termina en alguna parte (o sea, tienen todos los dígitos iguales a 0 a partir de cierto lugar), o bien son periódicos. Justamente, esto último es equivalente a que sean cocientes de dos enteros.

Nota 3: esta idea sobre todos los posibles libros con todos los posibles símbolos está en la obra de Jorge Luis Borges, *La biblioteca de Babel* ([http://es.wikipe dia.org/wiki/La\\_biblioteca\\_de\\_Babel](http://es.wikipe dia.org/wiki/La_biblioteca_de_Babel)).



## Más sobre el infinito. La paradoja de Tristram Shandy

John Barrow presenta una paradoja que le adjudica al escritor Tristram Shandy. La historia es interesante y plantea una nueva manera de mirar “al infinito”.

Tristram Shandy decidió escribir su “diario de vida”. Más aún: Shandy era tan detallista que le llevaba un año relatar cada día que había vivido. Por ejemplo, dedicó todo el año 1760 a escribir sólo lo que le había pasado el 1° de enero de ese año. Es decir, sólo el 31 de diciembre terminó la historia del 1° de enero. Contar lo que le sucedió el 2 de enero de 1760, le llevó todo el año 1761, y recién terminó de escribir lo que le pasó ese día el 31 de diciembre de 1761. A ese paso, como se advierte, Shandy estaba cada vez más lejos (en apariencia) de escribir su vida completa.

Por supuesto, si Shandy hubiera vivido como cualquiera de los mortales un número finito de años, sólo le hubiera alcanzado el tiempo para relatar un segmento muy reducido de su vida. Sin embargo (y acá lo invito a pensar), si en un salto imaginativo uno pudiera imaginar a Shandy viviendo infinitos días, ¿qué pasaría? Si así fuera, si Shandy viviera eternamente, no habría día de su vida que no hubiera quedado descrito en su diario.

En todo caso, una paradoja más sobre el infinito.

## Suma de los primeros $n$ números naturales

Se tienen distribuidas *cruces* en distintos renglones, con la característica de que a medida que uno va recorriendo las filas, el número de cruces aumenta en uno. Es decir, en la primera fila hay una cruz. En la segunda, hay dos. En la tercera, tres... y así sucesivamente.

```

X
X X
X X X
X X X X
X X X X X

```

Figura 1

¿Cómo hacer si uno quiere saber *el número total de cruces*? Por supuesto que la invitación está hecha para que piense solo/a, de manera tal que, si prefiere *no leer lo que sigue*, mucho mejor. De todas formas, voy a proponerle una solución de las muchísimas que es posible encontrar. Pero ésta me gusta porque incluye un argumento *gráfico*.

La figura que aparece con las cruces es un *triángulo*. Uno podría dibujar otro triángulo igual, esta vez con *circulitos*, y quedaría así:

```

O
OO
OOO
OOOO
OOOOO

```

Figura 2

Ahora, damos vuelta ese triángulo

```

OOOOO
  OOOO
    OOO
      OO
        O

```

Figura 3

Si colocamos juntos los triángulos que aparecen en las figuras 1 y 3, se tiene el siguiente dibujo:

```

X OOOOO
X X OOOO
X X X OOO
X X X X OO
X X X X XO

```

Figura 4

Como el objetivo era calcular el número de cruces que había en el primer triángulo, si uno mira el rectángulo que quedó formado en la figura 4 advierte que las *cruces* son exactamente la mitad (contando las cruces y los círculos). ¿Cómo calcular cuántas cruces y círculos hay en ese rectángulo? Multiplicando el número que hay en cada fila por el número en cada columna. Es decir, 6 (que son los que hay en la base) por 5 (los que hay en altura). Resultado: 30. Como las cruces son la mitad, entonces en total *hay 15 cruces*.

Con esta idea, si tenemos ahora un triángulo con *más cruces*, digamos el que aparece en la figura 5:

```

X
X X
X X X
X X X X
X X X X X
X X X X X X
X X X X X X X
X X X X X X X X
X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

```

Figura 5

Si uno quiere calcular el número de cruces, lo que hace es *dibujar un triángulo igual* pero con círculos en lugar de cruces. Luego, lo da vuelta y lo coloca junto al que aparece en la figura 5. Y se tiene el siguiente *rectángulo* (figura 6).

```

X O O O O O O O O O O
X X O O O O O O O O O
X X X O O O O O O O O
X X X X O O O O O O O
X X X X X O O O O O O
X X X X X X O O O O O
X X X X X X X O O O O
X X X X X X X X O O O
X X X X X X X X X O O
X X X X X X X X X X O

```

Figura 6

Luego, contando otra vez, en la *base* hay 11 elementos, entre cruces y círculos, y en la altura, 10. Conclusión: en total en el rectángulo hay

$$10 \times 11 = 110$$

elementos, y como las cruces son la mitad, se sigue que hay 55 cruces.

Una vez vistos estos ejemplos, queda claro lo que se puede hacer en general. Si uno tiene  $n$  filas con cruces y quiere saber cuántas cruces hay en total, se fabrica un triángulo igual, pero con círculos, y lo invierte. Después, lo pone al lado del otro, y queda formado un rectángulo. Todo lo que hay que hacer es contar cuántos elementos (entre cruces y círculos) hay en la *base* del rectángulo, y luego, contar cuántos elementos hay en la *altura* del rectángulo. Multiplicar esos números para saber cuál es el número total de elementos en el rectángulo y dividirlo por 2, para saber cuántas cruces hay. ¿Se entendió?

Hagamos la cuenta para verificar.

Se tiene un triángulo armado con *cruces* con  $n$  filas, de manera tal que en la primera fila hay 1 cruz, en la segunda hay 2, en la tercera hay 3, y así siguiendo. En la  $n$ ésima fila hay  $n$  cruces. Lo que tratamos de hacer es la siguiente suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

Es decir, sumar las cruces que hay en cada fila.

Formamos un triángulo *igual* pero armado con *círculos*. Y lo ponemos al lado del otro. Ahora, los invito a contar cuántos elementos tiene el rectángulo que queda formado.

En la base hay  $(n + 1)$  elementos (los  $n$  que aporta el triángulo de las cruces y un círculo). En la columna hay  $n$  elementos, porque el número de filas que había originalmente, y que no varió, es de  $n$ . O sea, empezamos con  $n$  filas y ese número no se alteró. Luego, queda formado un rectángulo de  $(n + 1)$  elementos en la base, y  $n$  en la columna. El número total de elementos, entonces, es:

$$(n + 1) \cdot n$$

Como el número de cruces era exactamente la mitad de esta cantidad, el *resultado final* es:

$$[(n + 1) \cdot n] / 2$$

Este argumento muestra, entonces, que si uno quiere calcular la *suma de los primeros n números naturales*, el resultado que obtiene es:

$$[(n + 1) \cdot n] / 2$$

En el primer libro de *Matemática... ¿Estás ahí?* conté la historia de Carl Friedrich Gauss, cuando la maestra les propuso a los alumnos que sumaran los primeros cien números naturales:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Lo que Gauss hizo fue sumar el primero y el último (1 + 100), y advirtió que le daba 101. Luego, sumó el segundo y el penúltimo (2 + 99) y descubrió que otra vez le daba 101. Después, sumó el tercero y el antepenúltimo (3 + 98) y, una vez más, le daba 101. Siguiendo de esa forma, y eligiendo números de ambas puntas, las sumas le daban siempre 101 y, por lo tanto, el cálculo era fácil: bastaba con multiplicar 50 por 101 (ya que hay 50 posibles parejas y 101 es el resultado de la suma de cada una de ellas), con lo cual el resultado era 5.050.

Luego de haber visto lo que hicimos más arriba, podemos entender de otra forma lo que hizo Gauss. Es decir, podemos tratar de darle la misma interpretación gráfica que pusimos al principio. Sería como tener un triángulo de 100 filas. La primera tiene 1 cruz, la segunda 2, la tercera 3... y así, hasta que la centésima tiene 100 cruces.

```

X
X X
X X X
X X X X
.....
X X X X X X X X . . . (esta última fila tiene 100 cruces)

```

Al hacer un triángulo *igual* pero con círculos, darlo vuelta y agregarlo al de las cruces para formar un rectángulo (como hicimos más arriba), descubrimos que el rectángulo tiene, en la base, 101 elementos (las 100 cruces y un círculo). Y como hay 100 filas, la cuenta que hay que hacer para calcular el número de elementos del rectángulo es multiplicar

$$101 \cdot 100$$

¿Pero cómo? ¿No era que Gauss hizo –y estaba bien– 101 x 50?

Claro, pero no olvidemos que lo que calcula 101 x 100 es el número de elementos del rectángulo. Para poder calcular el número de cruces, hay que dividir por 2, como hicimos más arriba. Y ahora sí, el resultado es el correcto:

$$(101 \cdot 100) / 2 = 101 \cdot 50 = 5.050$$

## Suma de números impares

Supongamos que uno empieza a calcular la *suma* de números impares. En los primeros pasos se tropieza con estos datos.

1	=	1
1 + 3	=	4
1 + 3 + 5	=	9
1 + 3 + 5 + 7	=	16
1 + 3 + 5 + 7 + 9	=	25
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	=	36

¿Alcanza a descubrir un patrón? Mire los resultados de la segunda columna y verá que se produce algo curioso: los números que aparecen son los cuadrados de los números naturales. Es decir, el patrón permite conjeturar que la suma de los primeros números impares se reduce a calcular el cuadrado de un número.

En este caso, podemos pensarlo haciendo algunos dibujos:

O
---

1

O	X
X	X

1 + 3

O	X	A
X	X	A
A	A	A

1 + 3 + 5

O	X	A	Y
X	X	A	Y
A	A	A	Y
Y	Y	Y	Y

1 + 3 + 5 + 7

O	X	A	Y	Z
X	X	A	Y	Z
A	A	A	Y	Z
Y	Y	Y	Y	Z
Z	Z	Z	Z	Z

1 + 3 + 5 + 7 + 9

En general, entonces, la suma de los primeros  $n$  números impares es igual a  $n^2$ . Es decir:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

### La Ley de Benford<sup>17</sup>

Lo que sigue es un ejercicio que sirve para poner a prueba nuestras supuestas “convicciones” y para “descalificar” nuestra intuición. Le propongo que se tome el trabajo de hacer una serie de verificaciones,

<sup>17</sup> La inspiración para publicar este artículo, y muchísimos de los datos que aquí figuran, están extraídos de sugerencias que me hicieron Pablo Coll y Pablo Milrud, ambos amigos y matemáticos. Además, hay un extraordinario artículo sobre la Ley de Benford que publicó Malcolm W. Browne en 1998, y que ha sido citado en forma incesante por todos aquellos que divulgan el contenido de esta ley.

algo realmente muy fácil, pero que requiere de un poco de tiempo. Por eso, le sugiero que lo tome con calma y, en todo caso, hágalo cuando tenga un rato libre. Se va a sorprender con los resultados...

Acá va.

- Elija un libro que tenga cerca. Cualquiera. Ábralo en cualquier página, y anote el número (de la página). Ahora, tome un libro diferente y elija una página al azar también. Anote el número de la página otra vez. Repita este procedimiento con muchos libros hasta que haya anotado el número de 100 páginas o más. (Le dije que tenía que dedicarle un rato, pero no me diga que es difícil. Seguro que es tedioso, sí, pero no es complicado de hacer.)
- Entre en un negocio cualquiera. Anote los precios de 100 productos o más. No importa qué tipo de negocio. Si lo prefiere (y tiene acceso), vaya a cualquier página de Internet y anote los precios de diferentes productos que ofrezca. Pero tienen que ser 100 o más.
- Obtenga ahora las direcciones de las personas que trabajan con usted, o compañeros de oficina o de clase. No importa. Además, consiga que le escriban las direcciones de gente que ellos conocen hasta que complete, otra vez, 100 o más de esos números. No hace falta que pongan los nombres, sólo los números de las direcciones.
- Busque en Internet, o en cualquier enciclopedia, la población de 100 o más ciudades y/o pueblos del país en donde vive usted. Anótelos.

Una vez que tenga esta lista de por lo menos 400 números (si es que hizo la tarea para el hogar que figura más arriba), sepárelos de la siguiente forma:

Anote en una columna todos los que empiezan con el dígito 1. Luego, en otra columna, los que empiezan con el 2. Después, otra columna más, con los que empiezan con el 3. Y así, hasta tener 9 columnas. Todas empiezan con dígitos distintos, del 1 al 9.

Antes de seguir, tengo algunas preguntas:

¿Usted cree que las columnas tendrán todas la misma cantidad de números? Es decir, ¿tendrán todas la misma longitud? ¿O le parece que habrá alguna que será más larga?

Antes de contestar, deténgase un momento y piense lo que usted cree que debería pasar. ¿No tiene la tentación de decir que “*da lo mismo*”? Es decir, uno intuye que, como eligió todos esos números al azar, el primer dígito puede ser cualquiera, debería dar lo mismo. Las columnas deberían tener todas longitudes similares. Sin embargo, *ino es así!*

Lo que sigue es la presentación en sociedad de una de las leyes más “antiintuitivas” que conozco. Se llama Ley de Benford. Los resultados (aproximados) que uno obtiene si hace los experimentos planteados más arriba, son los siguientes:

Dígito	% de que sea el primer dígito
1	30,1
2	17,6
3	12,5
4	9,7
5	7,9
6	6,7
7	5,8
8	5,1
9	4,6

¿No es increíble que haya más de un 30% de posibilidades de que el dígito con el que empiece sea un número 1? ¿No parece mucho más razonable que para todos los dígitos sea 11,11% (que se obtiene de hacer  $1/9$ )? No sólo eso. Luego, en escala descendente aparece el resto de los dígitos, tanto que al número 9 le corresponde menos de un 5% en el papel de líder.

Un alerta: esta ley, sin embargo, no se aplica a fenómenos que son verdaderamente aleatorios. Es decir, no se puede usar en la Lotería, donde la probabilidad de que salga cualquier número es la misma. Por

ejemplo, si usted pone nueve bolillas en un bolillero, numeradas del 1 al 9, saca una, anota, la pone nuevamente adentro, hace girar el bolillero, saca otra, anota otra vez, y sigue con el proceso, encontrará que los números aparecen igualmente distribuidos; la probabilidad de que aparezca cada uno es de  $1/9$ . Lo que hace falta es que no sean números al azar. Es decir, la Ley de Benford se aplica para conjuntos grandes de números que no sean aleatorios. Es decir que se usa esta ley cuando uno trabaja con conjuntos de muchos números, que obedezcan a la recolección de datos que provengan de la naturaleza (incluidos los factores sociales). Por ejemplo, si uno hiciera la lista de los montos de todas las facturas de luz que se pagan en la Argentina, entonces sí, ahí vale la ley. Si uno hiciera un relevamiento de la cantidad de kilos de carne que entraron por día en el mercado de Liniers en los últimos diez años, también. Lo mismo que si uno tuviera los datos de las longitudes de todos los ríos de un determinado país.

Si bien no lo escribí antes, ignoro el 0 como dígito inicial, porque uno –en general– no escribe un 0 a la izquierda. Cualquier número significativo empieza con algún dígito que no sea 0.

El que descubrió esto fue el doctor Frank Benford,<sup>18</sup> un físico que trabajaba en la compañía General Electric. En 1938, cuando no había calculadoras ni computadoras, la mayoría de las personas que hacían cálculos usaba tablas de logaritmos. Benford observó que las páginas que contenían logaritmos que empezaban con “1” como dígito, estaban mucho más usadas, sucias y ajadas que las otras! Así, empezó a sospechar que había algo particular detrás de esa observación, y lo fue a confrontar. De hecho, se dedicó a hacer el análisis de 20.229 conjuntos de números que involucraban categorías bien *desconectadas* entre sí:

<sup>18</sup> La mayoría de los investigadores sobre la Ley, que quedó reconocida como Ley de Benford, asegura que quien primero la observó fue el astrónomo y matemático Simon Newcomb. Por alguna extraña razón sus trabajos no tuvieron trascendencia y fueron desechados. Benford los retomó y les dio vida nuevamente. De todas formas, lo que es curioso es que ambos encontraron el mismo resultado haciendo observaciones sobre el uso que se les daba a *las tablas de logaritmos*.

- a) volúmenes de agua de todos los ríos de una región;
- b) estadísticas de béisbol de jugadores norteamericanos;
- c) números que aparecían en todos los artículos de un ejemplar dado de la revista *Reader's Digest*;
- d) distancias entre todas las ciudades de un país;
- e) direcciones de las primeras 342 personas que aparecían en la guía de *American Men of Science* (Hombres de Ciencia Norteamericanos);
- f) número de pobladores de cada una de las ciudades de un país;
- g) dólares a pagar por electricidad de los usuarios de una ciudad en particular.

Al comprobar que se repetía el patrón que había descubierto con las *tablas de logaritmos*, Benford se dio cuenta de que tenía en sus manos algo muy importante y muy antiintuitivo. Y se embarcó en hacer una demostración de lo que conjeturaba.<sup>19</sup> Lo increíble de esta ley, más allá de lo antiintuitiva, es que se usa –por ejemplo– para detectar a los *evasores de impuestos*. Un contador y matemático, el doctor Mark J. Nigrini, quien actualmente trabaja en Dallas, hizo la primera aplicación *práctica* de la Ley de Benford. La idea que usó es que, si alguien está tratando de falsificar datos, inexorablemente tendrá que inventar algunos números. Cuando lo haga, la tendencia es –por parte de la gente– usar muchos números que empiecen con 5, 6 o 7, y no tantos que empiecen con 1. Esto será suficiente para violar lo que predice la Ley de Benford y, por lo tanto, invita a que el gobierno haga una auditoría de esos números. La ley es claramente no infalible, pero sirve para detectar sospechosos. Lo curioso es que quienes usaron los primeros experimentos de Nigrini, aprovecharon para poner a prueba la declaración de impuestos de Bill Clinton. Nigrini concluyó que, si bien había más redondeos que los esperables, no parecía esconder ningún fraude al fisco.

<sup>19</sup> Benford demostró que la *probabilidad* de que apareciera el *dígito n* como primer número se podía calcular con la fórmula:

$$P = (\text{Log}(n + 1) - \text{Log}(n)) \\ = \text{Log}(1 + 1/n)$$

Un último dato, no menor. La ley se aplica aun modificando las unidades de medida. Es decir, no importa que uno use kilómetros o millas, litros o galones, pesos, euros, dólares o libras esterlinas: la ley vale igual.

Una manera interesante de convencerse de esto es la siguiente: supongamos que la distribución de los dígitos iniciales fuera uniforme, en el sentido de que *todos los dígitos* aparecerán en la misma cantidad.

Ahora, imaginemos que uno tiene una lista con los importes de las cuentas de luz que pagaron todos los habitantes de una ciudad durante *diez años*. Supongamos que la moneda que usaban es la libra esterlina (sólo para fijar las ideas). Para hacer fáciles las cuentas, digamos que cada *libra* se cotiza a 2 *dólares*. Entonces, para convertir a dólares la lista que teníamos recién, habría que multiplicarla por 2. ¿Qué pasaría entonces? Que todos los números que empezaban con 1, al multiplicarlos por 2, tendrán ahora como primer dígito, o bien un 2 o bien un 3. Pero para todos aquellos que empezaban con un 5, 6, 7, 8 y 9, al multiplicarlos por 2, empezarán *todos* con un 1.

¿Qué dice esto? Sugiere que, si uno no cree en la ley, y supusiera que la distribución de los dígitos iniciales es uniforme, entonces, al convertirlo a cualquier moneda, tendría que conservarse ese patrón. Sin embargo, como acabamos de ver, el patrón uniforme no se mantiene. El patrón que se mantiene es uno con mayor abundancia del dígito inicial 1, seguido en abundancia por el dígito inicial 2, etc., de acuerdo con la Ley de Benford.

Es difícil aceptar esta ley sin rebelarse. Es muy *antiintuitiva*. Sin embargo, sígame con otra explicación porque permite intuir por qué el resultado puede ser cierto. Supongamos que uno empieza analizando la Bolsa de Buenos Aires, por poner un ejemplo. No se asuste, no hay nada que saber sobre acciones ni bonos externos ni fondos de inversión. Es sólo una manera de mirar las cosas desde otro ángulo. Para fijar las ideas, supongamos que hubiera un crecimiento anual de la economía del 20%, y que el promedio de todo lo que se cotiza en la Bolsa fuera 1.000 (o sea, si promediara *las cotizaciones* de *todas* las acciones, obtendría el número 1.000).

Como se ve, el número 1 es el primer dígito. Para cambiar este primer dígito y pasar al siguiente, al 2, y llegar a 2.000, tendrán que pasar 4 años (componiendo el interés anualmente). Luego, durante 4 años se mantiene el 1 como primer dígito. En cambio, si uno empezara con 5.000, o sea con el 5 como primer dígito, en *sólo* un año (como el incremento anual es del 20%) pasaría de 5.000 a 6.000, y con ello cambia del 5 al 6. Es decir: el 1 se mantuvo cuatro años mientras que el 5, sólo uno.

Peor aún: si empezara con un 9 como primer dígito, o sea con un promedio de 9.000 en la misma Bolsa, en un poco más de medio año cambiará el primer dígito otra vez, porque llegaría a los 10.000.

Con esto, lo que se ve es que el 1 permanece mucho más tiempo como primer dígito que cualquier otro, y a medida que se acerca a 9, cada vez se sostiene menos tiempo. El 1 es el claro favorito.

Crefle o no, la Ley de Benford tiene múltiples aplicaciones prácticas y sirve para exhibir, también, que nuestra intuición trastabilla cuando es puesta a prueba en situaciones no convencionales. Por eso, una vez más, la mejor manera de tomar decisiones en la vida es apoyarse en la ciencia.

### Tirar 200 veces una moneda

De acuerdo con lo que escribió Malcolm W. Browne en un artículo que apareció en el *New York Times*, el doctor Theodore P. Hill pidió a sus estudiantes de Matemática del Instituto de Tecnología de Georgia que hicieran el siguiente trabajo en sus casas:

“Tomen una moneda, arrójenla al aire 200 veces y anoten los resultados que obtuvieron. Si no tienen ganas de hacerlo, pretendan que lo hicieron, y anoten lo que les parece que podría darles”.

Al día siguiente, cuando los alumnos trajeron los resultados, con asombro observaron que el profesor podía detectar, casi sin errar, quiénes habían efectivamente tirado 200 veces la moneda al aire y quiénes no.

En una entrevista, Hill dijo que lo que sucedía era que la gente no tenía idea de lo que realmente significa *el azar*. Por lo tanto,

cuando tiene que inventar datos, lo hace de acuerdo con su creencia y, como en general suele errar, es fácil descubrir quién se tomó el trabajo de hacer el experimento, y quién, en su defecto, eligió imaginarlo.

¿Usted diría que es alta o baja la probabilidad de que aparezcan seis o más caras consecutivas, o bien seis (o más) cecas consecutivas? Imagino que su respuesta será: “Bastante baja”. Es posible que ni usted ni yo sepamos cómo explicar esto, pero la intuición que tenemos nos hace sospechar que es poco probable que sucedan seis o más caras o cecas consecutivas en 200 tiradas. ¿Está de acuerdo conmigo en esto? ¿O cree que la probabilidad es alta?

Lo notable es que la probabilidad de que esto suceda es *muy* alta. Eso fue lo que comprobó Hill y lo escribió en un artículo que apareció en la revista *American Scientist* hace casi diez años. En particular, eso también es consecuencia de la Ley de Benford, y es tan antiintuitiva que, como hemos dicho, permite detectar a aquellos que quieren fraguar datos impositivos, por ejemplo, u otro tipo de fraudes por el estilo.

### Fórmulas para obtener números primos

A esta altura, doy por sobreentendido que usted sabe lo que es un número primo. Ya sabe además que son infinitos.

La pregunta, entonces, es: ¿cómo hacer para encontrarlos todos? Es decir, ¿habrá alguna fórmula que *provea* todos los primos? Por ejemplo, si uno quiere conseguir *todos* los números pares, sabe que la fórmula es:

$$2 \cdot n \qquad (1)$$

O sea, uno toma un número  $n$  cualquiera, lo multiplica por 2 y obtiene un número par. Y cualquier número par se obtiene de esa forma también, con lo cual *siempre* se puede escribir de la forma que aparece en (1).

Si uno quiere encontrar una fórmula que permita calcular *todos* los números *impares*, hace lo siguiente:

$$(2 \cdot n) + 1 \quad (2)$$

Usted elija cualquier número  $n$ , reemplácelo en la fórmula (2), y obtendrá un número impar. Y como antes con los pares, *todos* los números impares se obtienen de esa forma.

Por último, si uno quiere calcular todos los cuadrados, o sea, todos los números que resultan ser el producto de un número natural por sí mismo, basta con hacer:

$$n^2 \quad (3)$$

y otra vez, *todos* los cuadrados se obtienen de esa forma.

¿Por qué me interesa decir que tanto *todos* los pares, como *todos* los impares, como *todos* los cuadrados se pueden obtener de acuerdo con las fórmulas (1), (2) y (3) respectivamente? Porque los matemáticos andan a la búsqueda de una fórmula que provea *todos* los números primos. Ya se sabe que una fórmula de ese tipo no puede tener la forma de un *polinomio*; es decir, no puede ser como las ecuaciones (1), (2) y (3). Incluso se sabe también que ni siquiera aligerando un poco las hipótesis y sin pedir que la fórmula diera primos para todos los naturales  $n$ , sino sólo para algunos (pero infinitos) valores de  $n$ , aún así se sabe que no puede existir ningún polinomio que los provea. Por otro lado, uno se contentaría, ya no con obtener *todos* los números primos, sino al menos con obtener *algunos* de ellos. En un momento determinado, apareció una *expresión* que generó alguna esperanza:

$$n^2 + n + 41$$

... pero duró poco. Es que el polinomio

$$P(n) = n^2 + n + 41$$

permite obtener primos para todos los números  $n$  menores que 40. Revisemos la siguiente tabla:

$n$	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
9	131
10	151
11	173
12	197
13	223
14	251
15	281
16	313
17	347
18	383
19	421
20	461
21	503
22	547
23	593
24	641
25	691
26	743
27	797
28	853
29	911
30	971
31	1033



n	$n^2 + n + 41$
32	1097
33	1163
34	1231
35	1301
36	1373
37	1447
38	1523
39	1601

En la primera columna figuran los primeros treinta y nueve números naturales.<sup>20</sup> En la segunda, el resultado de aplicar la fórmula:

$$P(n) = n^2 + n + 41$$

para cada número  $n$  que figura a la izquierda. Todos los números de la segunda columna son números primos, lo cual permitió alentar alguna esperanza de que se pudiera seguir. Sin embargo, como escribí más arriba, duró poco, porque, si uno calcula la fórmula en el caso en que

$$n = 40$$

entonces se obtiene el número 1.681, que ya no es primo. En realidad, no sólo no es primo, sino que es un cuadrado:

$$1.681 = 41 \cdot 41 = 41^2$$

Otro hecho curioso (y precioso a la vez) es que, si uno resta de a dos los términos de la segunda columna, se tiene la siguiente tabla:

<sup>20</sup> Si agregáramos el número 0 y le permitimos a  $n$  tomar este valor, entonces se obtiene *también* un número primo, ya que para  $n = 0$ ,  $P(n) = 0^2 + 0 + 41 = 41$ , que es un número primo.

n	$n^2 + n + 41$	restando de a dos
1	43	$47 - 43 = 14$
2	47	$53 - 47 = 16$
3	53	$61 - 53 = 18$
4	61	$71 - 61 = 10$
5	71	$83 - 71 = 12$
6	83	$97 - 83 = 14$
7	97	$113 - 97 = 16$
8	113	$131 - 113 = 18$
9	131	$151 - 131 = 20$
10	151	$173 - 151 = 22$
11	173	$197 - 173 = 24$
12	197	$223 - 197 = 26$
13	223	$251 - 223 = 28$
14	251	$281 - 251 = 30$
15	281	$313 - 281 = 32$
16	313	$347 - 313 = 34$
17	347	$383 - 347 = 36$
18	383	$421 - 383 = 38$
19	421	$461 - 421 = 40$
20	461	$503 - 461 = 42$
21	503	$547 - 503 = 44$
22	547	$593 - 547 = 46$
23	593	$641 - 593 = 48$
24	641	$691 - 641 = 50$
25	691	$743 - 691 = 52$
26	743	$797 - 743 = 54$
27	797	$853 - 797 = 56$
28	853	$911 - 853 = 58$
29	911	$971 - 911 = 60$
30	971	$1033 - 971 = 62$
31	1033	$1097 - 1033 = 64$
32	1097	$1163 - 1097 = 66$

$n$	$n^2 + n + 41$	restando de a dos
33	1163	$1231 - 1163 = 68$
34	1231	$1301 - 1231 = 70$
35	1301	$1373 - 1301 = 72$
36	1373	$1447 - 1373 = 74$
37	1447	$1523 - 1447 = 76$
38	1523	$1601 - 1523 = 78$
39	1601	$1681 - 1523 = 80$

O sea, que si uno considera la fórmula como:

$$P(n) = n^2 + n + 41$$

las diferencias que figuran en la tercera columna resultan de hacer:

$$P(n + 1) - P(n) = 2 \cdot (n + 1)$$

para cada uno de los valores de  $n$  que figuran en la primera columna.

Otra fórmula interesante que involucra a los primos es:

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 2 \text{ es primo} \\ 2 + 1 &= 3 \text{ es primo} \\ 2 \cdot 3 + 1 &= 7 \text{ es primo} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 &= 31 \text{ es primo} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 &= 211 \text{ es primo} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 &= 2.311 \text{ es primo} \end{aligned}$$

pero:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031 = 59 \cdot 509$$

(y ya no es primo sino compuesto).

Sigo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 &= 510.511 = 19 \cdot 97 \cdot 277 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 &= 9.699.691 = 347 \cdot 27.953 \end{aligned}$$

Los siguientes primos de la forma

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \dots p + 1$$

(con  $p$  primo), aparecen cuando  $p = 31, 379, 1.019, 2.657$  y  $10.211\dots$  Es decir, se obtienen números primos para *algunos* valores de  $p$ , pero no para todos.

Por último, un pequeño párrafo para la distribución de los primos.

Si bien se sabe que hay infinitos primos, es interesante notar que, a medida que uno va recorriendo los números, son cada vez menos *densos* o, lo que es lo mismo, aparecen cada vez más espaciados.

Fíjese en esta lista:

- Entre los primeros 100 números naturales, hay 25 primos. O sea, 1 de cada 4.
- Entre los primeros 1.000 números naturales, hay 168 primos. O sea, 1 de cada 6.
- Entre los primeros 10.000 números naturales, hay 1.229 primos, o sea 1 primo cada 8,1 números.
- Entre los primeros 100.000 números naturales, hay 9.592 primos, o sea, 1 cada 10,4 números.
- En el primer 1.000.000 de números naturales, hay 78.498 primos, o sea 1 en 12,7.
- Entre los primeros 10.000.000 de números naturales, hay 664.579 primos, o sea 1 en 15.

Y para terminar, dos datos más:

Entre los primeros 100.000.000 de números naturales hay 5.761.455 primos, o sea 1 en 17,3; y entre los primeros 1.000.000.000

de números naturales, hay 50.847.534 números primos, lo que representa una proporción de 1 cada 19,6.

Es decir:

número $n$	primos hasta $n$
10	4
100	25
1.000	168
10.000	1.229
100.000	9.592
1.000.000	78.498
10.000.000	664.579
100.000.000	5.761.455
1.000.000.000	50.847.534
10.000.000.000	455.052.511
100.000.000.000	4.118.054.813
1.000.000.000.000	37.607.912.018
10.000.000.000.000	346.065.536.839

La función  $P(n)$  o  $\pi(n)$  es la que cuenta el número de primos que hay entre el número 1 y el número  $n$ . Por ejemplo, mirando la tabla que figura acá arriba se deduce que:

$$\begin{aligned}\pi(10) &= 4 \\ \pi(100) &= 25 \\ \pi(1.000) &= 168 \\ \pi(10.000) &= 1.229, \text{ etcétera.}\end{aligned}$$

Además, hay un teorema que permite estimar el número de primos que hay entre 1 y  $n$ , o sea, el valor aproximado de  $\pi(n)$ .

$$\pi(n) \cong n/\log(n)$$

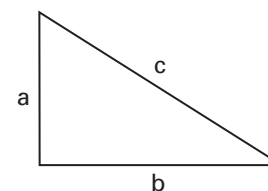
Como se ve en estos pocos ejemplos, los números primos son una usina generadora de intrigas dentro de la matemática. Se sabe que son

infinitos, pero no existe ninguna fórmula que permita generarlos a todos. Más aún: ni siquiera se conoce una fórmula que permita obtener *infinitos* números primos, aunque no sean todos. Se conocen los primos gemelos, pero no se sabe si son infinitos. Se cree que todo número par (salvo el 2) es la suma de dos primos, conjetura que se debe a Goldbach, pero se desconoce la demostración. Son los genes o átomos que producen los números naturales. Son los que dan origen al famoso Teorema fundamental de la aritmética (véase *Matemática... ¿Estás ahí?* Episodio 1, p. 49). Son los que permiten hoy *encriptar* los mensajes de Internet, hacer transacciones bancarias garantizando la identidad, retirar dinero en los cajeros automáticos, es decir, se *saben* muchísimas cosas sobre ellos... pero, aun así, todavía resultan *resbaladizos y difíciles de domar*.

### Ternas pitagóricas

El teorema de Pitágoras dice: “En un triángulo rectángulo, se verifica siempre que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”. Un triángulo rectángulo es un triángulo cualquiera en el que uno de los ángulos mide 90 grados. O lo que es lo mismo, uno de sus ángulos es un ángulo recto (como en una escuadra). El lado mayor, el que aparece por lo general dibujado como la diagonal, se llama hipotenusa. Los otros dos lados se llaman catetos.

En un dibujo, entonces, se tiene



Llamemos  $a$  y  $b$  a las longitudes de los catetos, y  $c$  a la longitud de la hipotenusa.

Lo que dice el teorema, entonces, es que

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

En realidad, el teorema dice que, si uno tiene un triángulo rectángulo y conoce la longitud de los dos catetos, entonces, inexorablemente conoce el valor de la hipotenusa. Ésta queda determinada por la longitud de los catetos, y en este caso, se verifica la igualdad (1).

Por ejemplo, si uno dibujara un triángulo rectángulo, en el que los catetos miden  $a = 3$  y  $b = 4$ , entonces la hipotenusa *tiene que medir* 5, porque, usando la fórmula (1), tenemos

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Y este número, 25, tiene que ser el cuadrado de algún número. Y justamente, 25 es el cuadrado de 5.

Luego, podemos decir que la terna (3, 4, 5) es una terna pitagórica. A partir de ahora, entonces, a una terna

$$(a, b, c)$$

que cumpla con la condición (1), la llamaremos *terna pitagórica*.

Pregunta: ¿cómo se hace para conseguir ternas pitagóricas en las que los tres números sean enteros? Uno se hace esta pregunta porque, si pone por ejemplo:

$$a = 2, b = 3,$$

Entonces, sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

Todo esto está bien, pero si

$$c^2 = 13$$

entonces,  $c = \sqrt{13}$ . Y este número, no es un número entero.

Por supuesto

$$(2, 3, \sqrt{13})$$

es una terna pitagórica, pero nosotros buscamos aquellas en las que los tres números sean enteros (y no nulos). Ya sabemos lo que buscamos. ¿Cómo se hace para obtener esas ternas?

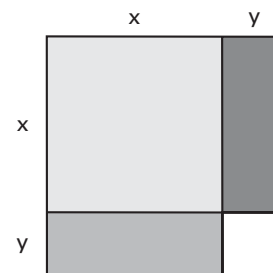
Por otro lado, aparte de la que ya encontramos (3, 4, 5), ¿existen otras? Lo interesante del planteo es que usted está en condiciones de encontrar la respuesta por sus propios medios. Y vale la pena que lo intente. También puede seguir leyendo lo que sigue, pero la gracia está puesta en pensar *uno mismo*.

Quiero mostrar dos igualdades interesantes, que se conocen como “el cuadrado de una suma de números” y “el cuadrado de una diferencia de números”. Puesto de otra forma, esto dice:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1)$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (2)$$

Para convencerse de que esto es cierto, basta con hacer la cuenta. Es decir, en el caso (1), multiplicar  $(x + y)$  por sí mismo, y agrupar, y en el caso (2), multiplicar  $(x - y)$  por sí mismo, y luego agrupar también. Geométricamente, o gráficamente, esto puede verse así:

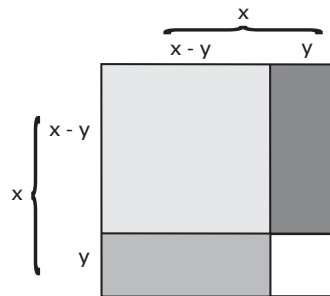


En el primer caso, se tiene un cuadrado de *lado*  $(x + y)$ . Cuando uno quiere calcular el área de ese cuadrado —o sea,  $(x + y)^2$ —, mirando las distintas áreas dibujadas, queda:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

en donde el primer “sumando”  $x^2$  resulta de calcular el área del cuadrado que tiene a  $x$  de lado; el segundo “sumando”,  $2xy$ , resulta de la suma de las áreas de los dos rectángulos iguales, con un lado igual a  $x$  y otro igual a  $y$ , y por último, el tercer y último “sumando” es  $y^2$ , y resulta de calcular el área del cuadrado más chico, de lado igual a  $y$ .

De la misma forma, si uno quiere ahora convencerse *geométricamente* de la igualdad (2), mira (fijo, eso sí) este dibujo:



Y lo que descubre, es que

si llama  $x$  = lado del cuadrado mayor,  
 $y$  = lado del cuadrado menor,

y quiere calcular la superficie del cuadrado de lado  $(x - y)$ , se tiene:

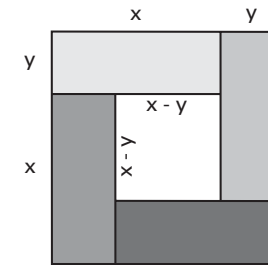
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

¿Cómo apareció esta fórmula?

Es que cuando uno quiere calcular el área del cuadrado de lado  $(x - y)$ , calcula el área del cuadrado mayor (medida por  $x^2$ ), luego resta las superficies de los dos rectángulos iguales de lados  $x$  y  $y$ , pero tiene que notar que está quitando dos veces el cuadrado cuya superficie es  $y^2$ . Por eso, hay que agregarla una vez, y de ahí la fórmula final:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

De manera tal que ya tenemos geoméricamente demostradas las dos fórmulas.



Aquí se ve que

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

Con estas dos fórmulas, ahora puede construir las ternas pitagóricas con números enteros que estábamos buscando. Elija dos números naturales (enteros positivos) cualesquiera, digamos  $m$  y  $n$ . Con ellos fabriquemos otros tres números:  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Lo hacemos así:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2mn \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Por ejemplo, si tomamos  $m = 3$  y  $n = 2$ , se obtienen:

$$\begin{aligned}a &= 3^2 - 2^2 = 5 \\b &= 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \\c &= 3^2 + 2^2 = 13\end{aligned}$$

Observe ahora que la terna  $(a, b, c) = (5, 12, 13)$  es pitagórica. Para comprobarlo, hay que hacer:

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

y justamente:  $169 = 13^2$ .

¿Por qué pasó esto? ¿Habría sido casualidad? No, no fue casualidad. Fíjese cómo están contruidos  $a$ ,  $b$  y  $c$  (confronte las fórmulas que aparecen en 4). Con esa definición, cualquier terna  $(a, b, c)$  que uno obtenga, siempre *será* pitagórica. Es decir, la terna

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

es *siempre* pitagórica. Hagamos la cuenta.

Para que esto sea cierto, hay que elevar la primera coordenada al cuadrado, sumarle el cuadrado de la segunda coordenada, y fijarse que dé el cuadrado de la tercera coordenada. O sea, hay que ver que:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 \quad (5)$$

¿Será verdad esto?

Calculemos usando las fórmulas que dedujimos hace un rato para el cuadrado de la suma de dos números y el cuadrado de una diferencia (\*) y (\*\*). Entonces, hacemos el cálculo del primer miembro en la ecuación (5):

$$\begin{aligned}(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4\end{aligned}$$

Y justamente, este último término es igual a

$$(m^2 + n^2)^2$$

que es lo que queríamos probar en la ecuación (5). Es decir, ahora sabemos cómo construir ternas pitagóricas. Basta entonces con elegir cualquier par de números naturales  $n$  y  $m$ , y con ellos construir

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

Incluyo aquí una tabla con *algunos pares*  $m$  y  $n$ .

$m$	$n$	$a$	$b$	$c$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
7	2	45	28	53
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41
5	1	24	10	26
6	5	11	60	61

Lo que hay que hacer ahora, si uno quiere tener la satisfacción de que hizo todo bien, es comprobar que los resultados sean los esperados. Es decir, verificar que si uno calcula

$$a^2 + b^2 = c^2$$

pasa lo que tenía que pasar.

Por supuesto, hay muchas maneras de construir *ternas pitagóricas*. De hecho, si uno *ya tiene una terna pitagórica*  $(a, b, c)$ , puede construir *infinitas*, *multiplicando cada término* de la terna por cualquier número. Por ejemplo, si  $(a, b, c)$  es pitagórica, entonces  $(2a,$

$2b, 2c$  es pitagórica, y  $(3a, 3b, 3c)$  también... y así siguiendo. De hecho, si  $(a, b, c)$  es pitagórica, entonces

$(ka, kb, kc)$  es pitagórica

cualquiera que sea el número natural  $k$  que uno elija. Esto se demuestra muy fácilmente porque, como uno sabe que

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (***)$$

Entonces

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2)$$

Usando (\*\*\*):

$$= k^2 c^2$$

Luego, la terna  $(ka, kb, kc)$  es pitagórica también, para cualquier número natural  $k$ . Pero, si uno se fija en la tabla de más arriba, todas las que aparecen allí son originales, en el sentido de que ninguna se obtiene de las anteriores multiplicándolas por algún número. Otra forma de escribir esto es decir que el máximo común divisor entre los números  $a$  y  $b$ , es 1. O sea, no tienen divisores comunes y, por lo tanto, tampoco tendrán un divisor común con  $c$ . Así, uno puede garantizar que, o bien  $a$  es un número par y  $b$  es impar, o bien  $a$  es un número impar y  $b$  un número par. De hecho, entonces, hemos conseguido infinitas ternas pitagóricas, nuestro objetivo inicial.

### Un desafío

El que sigue es un problema precioso y sirve para utilizar mucha y muy linda matemática. Supongamos que tiene en una bolsa los primeros *cientos números naturales*. O si prefiere, suponga que tiene den-

tro de una bolsa 100 tarjetas numeradas del 1 al 100. Es decir, dentro de la bolsa están:

$\{1, 2, 3, 4, \dots, 27, 28, 29, \dots, 97, 98, 99, 100\}$

Hay muchas maneras de meter la mano en esa bolsa, y sacar 10 de esos números. Elija una cualquiera.

El problema consiste en demostrar que, entre ese grupo de 10 números que usted eligió, se pueden separar dos grupos que no contengan ningún número en común, pero cuya suma sea la misma. No hace falta usar los 10 números, pero lo que sí es seguro es que hay dos subgrupos disjuntos (sin números en común) que tienen la misma suma.

Es decir: uno tiene los 10 números; lo que hay que demostrar es que hay por lo menos dos formas de separar *algunos* de esos números en dos grupos disjuntos, de manera tal que *la suma de los dos subgrupos dé lo mismo*.

Por ejemplo, si al meter la mano en la bolsa sacara *justo* los 10 primeros números

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,

tendría que ser capaz de encontrar al menos *dos subgrupos distintos cuya suma diera igual*.

Hay muchas formas de conseguir dos subgrupos que provean una solución al problema. Veamos algunos:

a) Elijamos

$\{1, 2\}$  y  $\{3\}$ .

Ambos conjuntos suman 3.

b) Otros dos subgrupos son:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } \{7, 8\}$$

(En este caso, ambos suman 15.)

c) Otra más:

$$\{5, 6, 7\} \text{ y } \{10, 8\}$$

Me imagino lo que está pensando: es trivial encontrar los dos subgrupos una vez que uno tiene los 10 números. De acuerdo. En el ejemplo que acabo de poner fue fácil.

Lo invito ahora a hacer lo mismo en el caso que sigue:

$$\{17, 31, 42, 43, 74, 75, 76, 87, 98, 99\}$$

Piénselo usted solo/a. Yo no traté de hacerlo en este caso, pero usted siga adelante y entreténgase un rato. Creo que ahora, al menos, se entiende el planteo y qué queremos encontrar.

Resolver el problema supone *demostrar* que esos *dos* subgrupos *existen siempre*, independientemente del primer grupo de *10 números que sacó de la bolsa*. Pero, como sucede muchas veces en matemática, lo que vamos a poder hacer es demostrar que siempre existen, aunque no los encontraremos, efectivamente. Es decir, este problema tiene la gracia de que muestra algo que sucede muchas veces cuando uno trabaja en ciencia y, muy en particular, en matemática. Uno tiene un problema para resolver, pero *no sabe si tiene solución o no*. Por supuesto, en el escenario *ideal*, uno trata de encontrar la solución y se terminó la discusión. Pero si uno no pudo encontrarla hasta ese momento, quizás es útil saber que por lo menos existe la solución que se busca. Así, hay teoremas llamados “*de existencia*” que aseguran que ciertas situaciones o problemas *tienen solución*, pero no la encuentran. Lo que sí hacen es decir: “vea, hasta acá usted no la habrá encontrado, pero el teorema *le garantiza que existir, existe. ¡Siga buscando!*”. Es más. Algu-

nos teoremas se llaman “de existencia y unicidad”, en el sentido de que *hay solución*, y no sólo eso, sino que hay una sola solución.

Y, para pensar: ¿de cuántas formas se pueden elegir subconjuntos entre 10 elementos?

### Un número primo $p$ y ladrillos de $(m \times n)$

Primero, un ejemplo. Supongamos que tiene un cuadrado que mide 17 metros de lado (por ejemplo, el piso de un patio, en un colegio). Supongamos, además, que tiene azulejos de cerámica de distintos tamaños, digamos de  $2 \times 3$ , o de  $3 \times 3$  (siempre en metros). ¿Cómo puede hacer para cubrir toda la superficie sin *partir* los azulejos?

Una vez que se *peleó* un rato con este problema, le propongo uno un poco más general: si uno tiene un cuadrado de lado  $p$  (donde  $p$  es un número primo, o sea que se tiene una superficie de  $p^2$  metros cuadrados) y ladrillos de  $(m \times n)$  (donde  $m$  y  $n$  son números naturales cualesquiera entre 1 y  $p$ ), ¿cómo hace para cubrir toda la superficie?

Antes de escribir la respuesta, lo invito a pensar lo siguiente. Es muy importante (y determinante, como ya habrá advertido si quiso resolver el problema inicial) el hecho de que el número  $p$  sea primo. Eso significa (lo recuerdo aquí) que los únicos *divisores que tiene* son él mismo y el número 1.

Supongamos que uno tiene ladrillos de  $(m \times n)$ , y que usa una cierta cantidad (digamos  $r$ ) de ellos para cubrir la superficie del cuadrado, que sabemos que es de  $p^2$ . Eso significa que

$$r \cdot (m \cdot n) = p^2 = p \cdot p \quad (*)$$

¿Por qué es cierta esta igualdad? Es que, si cada *ladrillo* tiene dimensiones  $(m \times n)$  y usamos  $r$  de ellos para cubrir el cuadrado original, entonces la superficie que cubren esos ladrillos tiene que ser igual a la del cuadrado. Como el número  $p$  es primo, entonces, el término de la izquierda de (\*) no puede contener ningún otro número



que no sea “copias de  $p$ ”. Esto pasa porque la descomposición es única (véase la página 49 del Episodio 1 de *Matemática... ¿Estás ahí?* Se entiende que la descomposición es única en factores primos, como allí se indica).

Luego, para que la ecuación (\*) sea válida, la única manera posible es que los tres números,  $r$ ,  $m$  y  $n$ , sean iguales a  $p$  o a 1. Esto sucede porque el número  $p$  es primo, y no se puede descomponer más que como

$$p = 1 \cdot p$$

o bien

$$p = p \cdot 1$$

Por lo tanto, lo que tiene que pasar es que los ladrillos sean de las siguientes dimensiones:

- $(1 \cdot 1)$  En este caso, hacen falta  $p^2$  ladrillos.
- $(1 \cdot p)$  Aquí harán falta  $p$  ladrillos.
- $(p \cdot 1)$  Lo mismo que recién: harán falta  $p$  ladrillos.
- $(p \cdot p)$  En este caso, hará falta *un solo* ladrillo

Todo este razonamiento lo conocen bien los azulejistas o quienes colocan baldosas en edificios.

Para terminar, otro ejemplo: supongamos que uno tiene que poner baldosas en un patio cuadrado de 11 metros de lado. Esto significa que la superficie a cubrir es de 121 metros cuadrados. Se pueden usar baldosas de cualquier tipo, pero cuyos lados midan un número entero de metros. Es decir, baldosas de  $(m \times n)$ , donde  $m$  y  $n$  son números naturales. Por lo que vimos recién, las únicas que se pueden usar son baldosas de:

- $1 \cdot 1$
- $1 \cdot 11$
- $11 \cdot 1$
- $11 \cdot 11$

### Problema de Brocard (un problema *abierto*)

Quiero plantear ahora un problema abierto (sin solución) hasta hoy, fines de 2007. Necesito que nos pongamos de acuerdo con la notación, para que se entienda el enunciado. Por un lado, ya definí en otras oportunidades lo que se llama *el factorial de un número natural  $n$* , y se escribe  $n!$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo,

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$$

O sea, el “factorial de un número  $n$ ” consiste en multiplicar *todos* los números para atrás, hasta llegar al 1, incluyendo al mismo  $n$ .

Por otro lado, “elevar un  $m$  número al cuadrado”, o sea  $m^2$ , es multiplicarlo por sí mismo. Por ejemplo,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

$$123^2 = 123 \cdot 123 = 15.129$$

Ahora estoy en condiciones de plantear el problema. Lea las siguientes tres igualdades:

$$a) \quad 5^2 = 4! + 1$$

$$b) \quad 11^2 = 5! + 1$$

$$c) \quad 71^2 = 7! + 1$$

Haga las cuentas conmigo:

- a)  $5^2 = 4! + 1 = 25$   
 b)  $11^2 = 5! + 1 = 121$  (\*)  
 c)  $71^2 = 7! + 1 = 5.041$

O sea, las *tres* igualdades cumplen esta ecuación:

$$m^2 = n! + 1 \quad (**)$$

Lo interesante, entonces, es que al “mirar” las “tres” igualdades de (\*), uno advierte que en cada caso, hay un *par* de números que cumplen la ecuación (\*\*).

En el caso (a)  $m = 5$  y  $n = 4$

En el caso (b)  $m = 11$  y  $n = 5$

En el caso (c)  $m = 71$  y  $n = 7$

Es decir, hay tres ejemplos de pares de números, que cumplen con la ecuación (\*\*). Lo que *no se sabe* hasta hoy es si hay *otros pares* de números que cumplan esa ecuación. Los únicos conocidos son esos tres (5, 4), (11, 5) y (71, 7). El famoso matemático húngaro Paul Erdos conjeturó que *no hay otros*, pero, hasta hoy, no se sabe. El problema se conoce con el nombre de “Problema de Brocard”, y los pares de números que cumplen la ecuación (\*\*) se llaman “Números de Brown”.

En 1906 ya se sabía (lo demostró Gérardin) que, si el número  $m > 71$  (mayor que 71), entonces tenía que tener por lo menos 20 dígitos. Otro que *visitó* el problema fue el famoso Ramanujan, quien lo abordó en 1913. En 1994, Guy fue otro de los que afirmó que lo más probable era que *no hubiera más soluciones*.

Todo bien, pero hasta el momento no hay *certeza al respecto*. ¿Quiere intentar?

## Juegos y matemática

### Teoría de juegos. Estrategia (una definición)

La matemática tiene una rama que se llama “Teoría de juegos”. Sí: teoría de *juegos*. ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece *juegos* en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes en el colegio?

Ahora bien: ¿de qué se trata esta teoría? Se trata de aprender y diseñar *estrategias* para ganar, y que sirven en la vida para enfrentar situaciones cotidianas. Obviamente, nadie puede asegurar un triunfo (porque todos los participantes podrían haber estudiado del mismo libro), pero se trata de encontrar la mejor manera (la más “educada”) de jugar a un juego, o de enfrentar un problema de la vida diaria.

Quiero empezar con lo que se llama *pensamiento estratégico*. Dos personas o grupos compiten para conseguir algo que está en juego. Puede ser una partida de ajedrez, un partido de fútbol, pero también una licitación que hace un gobierno para adjudicar cierto tipo de telecomunicaciones, o la electricidad. Incluso, individuos que quieren conseguir un trabajo.

Usted y el otro, o usted y los otros, alguien puja con usted para obtener algo. Este (esos) otro(s) *piensa(n) igual que usted, al mismo tiempo que usted, acerca de la misma situación*. En todo caso, se trata de saber quién es capaz de *maximizar el retorno* (en el sentido de “ganancia”).

En esencia, se trata de diseñar una estrategia para enfrentar a sus oponentes, que deberá incluir inexorablemente cómo anticiparse a lo que ellos van a hacer, cómo contrarrestarlos, y cómo hacer para que *prevalezca su posición* o, si lo prefiere, cómo hacer para que pueda *ganar usted*. Por supuesto, así como tendrá que considerar qué es lo que el otro jugador está pensando, él, a su vez, tendrá que considerar lo que piensa usted.

Y justamente, la Teoría de juegos es el área de la matemática que se ocupa de cómo optimizar ese tipo de *toma de decisiones*, y se basa en generar y estudiar modelos que *simulan* interacciones entre dos (o más) partes, y encontrar la *estrategia* más adecuada para obtener un objetivo determinado.

Y acá entra en escena el comportamiento racional. ¿Qué quiere decir?

Uno puede decir que actúa con racionalidad cuando:

- piensa cuidadosamente antes de actuar;
- es consciente de sus objetivos y preferencias;
- conoce sus limitaciones;
- sabe cuáles son las restricciones que impone el entorno;
- estima qué va a hacer su oponente de acuerdo con lo que usted cree que son sus virtudes y flaquezas;
- puede anticipar varias jugadas;
- puede imaginar diferentes escenarios.

La Teoría de juegos agrega una nueva dimensión al comportamiento racional, esencialmente, porque enseña a pensar y a actuar en forma “educada” cuando uno tiene que enfrentarse con otras personas que usan las mismas herramientas.

Como escribí más arriba, la Teoría de juegos no se propone enseñar los secretos de cómo jugar “a la perfección”, o garantizar que nunca va a perder. Eso ni siquiera tendría sentido pensarlo, ya que usted y su oponente podrían estar leyendo el mismo libro, y no podrían ganar al mismo tiempo. La mayoría de los juegos son lo suficientemente complejos y sutiles, e involucran decisiones basadas en la

idiosincrasia de las personas o en elementos azarosos, como para que ni la Teoría de juegos (ni nada) pueda ofrecer una receta que garantice el éxito. Lo que *sí provee* son algunos principios generales para aprender a interactuar con una estrategia.

Uno tiene que suplementar estas ideas y métodos de cálculo con tantos detalles como le sea posible, de manera tal de dejar librado al azar, justamente, lo menos posible, para de esa forma ser capaz de diseñar lo que se denomina “la estrategia óptima”. Los mejores estrategias mezclan la ciencia que provee la Teoría de juegos con su propia *experiencia*. Pero un análisis correcto de cualquier situación involucra también aprender y describir todas las limitaciones.

Tome cualquier juego en el que haya interacción y apuestas entre los participantes. Por ejemplo, truco, tute o póquer, por sólo nombrar algunos de los más comunes. Parte de la estrategia es saber “mentir”. Pero, otra vez, ¿qué quiere decir *saber* mentir en este caso? Me explico: aunque parezca loco, se trata de que quien no tiene una buena mano, o no tiene buenas cartas, alguna vez sea descubierto por sus rivales. Lea de nuevo lo que dice: uno necesita que los oponentes lo descubran (a uno) mintiendo. ¿Por qué? Sencillamente, porque no es bueno para usted que se sepa de antemano que, *siempre* que usted hace una apuesta o un desafío de cualquier tipo, lo hace porque tiene buenas cartas. Eso significaría que sus rivales tienen un dato que usted no querría que tuvieran, aunque más no fuera porque no podría sacar mayores ventajas en caso de tener una buena mano. Un buen jugador se deja sorprender. Puede que pierda esa pequeña batalla, pero eso le permitirá instalar una duda en el adversario, tornándole más difícil la decisión. Eso le permitirá, eventualmente, ganar cuando reciba buenas cartas, pero también zafar cuando no sea así. Por ejemplo, para quienes juegan al truco, tienen que ser descubiertos cantando “envido” aunque sus cartas no los autoricen a pensar que van a ganar. Puede que pierdan esa mano, pero esa inversión invitará a sus rivales a que también “acepten su envite” cuando tenga buenas cartas. Y ahí sí sacará las mayores ventajas.

La Teoría de juegos trata de establecer *estrategias*, y termina siendo una buena mezcla entre matemática y una gran dosis de psicología.

Tomemos un ejemplo muy sencillo: “Piedra, papel o tijera”. Este juego consiste en poner una mano detrás de la espalda, igual que su rival. Tienen que exhibirla simultáneamente con uno de esos tres gestos: la mano abierta representa el papel; el puño es el símbolo de una piedra; por último, si uno muestra dos dedos haciendo una V “acostada” indica tijera. Como es sabido, la piedra “rompe” la tijera, el papel “envuelve” a la piedra y la tijera “corta” el papel. Éste es un ejemplo de un juego en el que no hay una manera segura de “ganar”. Depende no sólo de lo que hace uno, sino de lo que haga el otro. ¿Hay acaso una estrategia? Sí, pero es sutil. Por ejemplo, si fuéramos a jugar a este juego y yo detectara que usted me muestra una piedra con una probabilidad mayor de *una vez en tres*, entonces empezaría a “usar papel” más frecuentemente. Si jugáramos suficiente tiempo, yo “tendría una ventaja” sobre usted, porque me estará mostrando un patrón en su forma de jugar. La estrategia *perfecta* para este juego es elegir *siempre al azar lo que va a exhibir*. Si los dos jugaran así, ninguno sacaría ventaja porque se equipararían las posibilidades. Si alguno de los jugadores empezara a usar un “patrón”, sea cual fuere, el otro jugador podría detectarlo e inmediatamente *tendría una ventaja*.

John Nash consiguió el Premio Nobel en Economía en 1994 por sus aportes a la Teoría de juegos.<sup>21</sup> Por un lado, existen los juegos llamados de *suma cero*. Por ejemplo, si usted juega al póquer con otras personas, todo lo que haya ganado será el resultado de lo que los *otros*

<sup>21</sup> Este campo apareció en 1944 con la publicación de *Teoría de juegos y comportamiento económico*, de John von Neumann y Oskar Morgenstern, y luego ocupó el centro de la escena mundial cuando la usó la RAND Corporation para definir *estrategias nucleares*. El que se hizo famoso por sus aportes a esta teoría fue el laureado John Nash (Premio Nobel de Economía e inspirador del libro y la película *Una mente brillante*). Él fue quien introdujo un concepto organizador de la teoría, conocido ahora como el “Equilibrio de Nash”.

La Teoría de juegos es usada fuertemente hoy, no sólo en economía (que es su verdadero origen), sino también en biología, psicología, sociología, filosofía, ciencias políticas, en el campo militar (casi una obviedad), en inteligencia artificial y en cibernética. Y en la vida cotidiana, ciertamente. Algunas referencias: *Game Theory: A Non-Technical Introduction to the Analysis of Strategy* (por Roger McCain); [http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría\\_de\\_juegos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_juegos); *Game Theory* (por Drew Fudenberg y Jean Tirole).

*perdieron*. La *suma* del dinero involucrado da *cero*. Dicho de otra manera, *no aparece dinero nuevo*. Nadie puede ganar un dinero que otro no perdió (y viceversa).

El aporte de Nash fue considerar lo que llamó los juegos que “*no suman cero*”. Cuando aún no había cumplido treinta años, desarrolló el concepto de lo que hoy se conoce con el nombre del “Equilibrio de Nash”. Ésta es una definición muy interesante sobre lo que significa alcanzar una situación en la que *todos los participantes* se van a sentir contentos. Puede que alguno hubiera podido obtener algo “mejor” si actuaba en forma individual, pero *colectivamente* es la mejor situación posible (para el grupo). Es decir, todos los participantes advierten que es mejor establecer una “estrategia para todos” que una individual. De esto se trata muchas veces en el “mundo real”. En el caso de un juego de uno contra uno, el “equilibrio de Nash” se alcanza cuando nadie tiene nada para reclamar, en el sentido de que uno no variaría lo que hizo o está por hacer *aun sabiendo lo que va a hacer el otro*. En un juego de cartas sería como decidir qué carta uno va a jugar indistintamente de si pudiera ver las cartas del otro o no.

Por ejemplo: supongamos que veinte personas van a comprar durante cierto mes del año un determinado modelo de auto. Quizá, cada uno pueda negociar un precio que le convenga personalmente. Pero si se pusieran todos de acuerdo en *entrar* en la concesionaria juntos y llevaran una oferta para comprar veinte autos, parece lógico pensar que obtendrán un mejor precio.

Es casi una “*teoría del compromiso*”, algo muy sencillo, pero nadie lo había podido sistematizar hasta que lo hizo Nash. Él no estaba tan interesado en cómo alcanzar un equilibrio en el sentido de que todo el mundo estuviera contento con su posición, pero sí sobre cómo deberían ser las *propiedades* que un *equilibrio debería tener*. Una idea aproximada de lo que hizo Nash es lo siguiente: si uno preguntara a todos los integrantes de una mesa (de negociaciones, por ejemplo): “Si todos los otros jugadores se mantuvieran en la posición que están ahora, ¿usted cambiaría lo que está haciendo?”. Lo que equivaldría a preguntar si cada uno mantendría su posición, *si supiera que todo el resto se mantendrá quieto*. Ésa es la lógica para alcanzar el “equilibrio de Nash”.

Mucho tiempo después de que Nash escribiera su teoría del equilibrio en 1950, el mundo comenzó a usarla. De hecho, el mejor exponente fue cómo se empezó a tratar el tema de las “licitaciones” o “remates”, y presentó un ejemplo maravilloso: las reglas que gobiernan un remate son las mismas que gobiernan un “juego”. En este caso, los “apostadores” son los competidores en un juego; las estrategias son “su plan de acción”, la forma en la que van a apostar, y la ganancia es quién obtiene lo que se vendía y cuánto paga por lo que está en juego.

A los que trabajan en Teoría de juegos, este tipo de “licitaciones” o “remates” les permite *predecir* lo que los jugadores van a hacer, aprovechando lo que saben del equilibrio de Nash, y transforman reglas que podrían ser muy complicadas en algo “analizable”. No sólo eso: en ese tipo de operaciones, cuando hay “grandes licitaciones”, cuando se habla de “miles de millones de dólares”, los apostadores saben bien qué hacer. Ellos saben que hay mucho dinero en juego; se pasan mucho tiempo pensando y contratan expertos que les permitan mejorar su posición. Para fijar las ideas, uno puede pensar en “licitaciones gubernamentales”, en las que aparecen –por ejemplo– empresas de telefonía, o de Internet, o de telefonía celular involucradas.

En el pasado, este tipo de licitaciones se manejaban en forma arbitraria, algo así como un concurso de belleza. Como consecuencia, el resultado era que los gobiernos no conseguían que nadie pagara el verdadero valor de lo que estaba en juego, y eso sin hablar de la corrupción endémica de quienes negocian ese tipo de contratos.

De hecho, con el aporte de Nash los gobiernos tienen ahora una herramienta muy poderosa: que los interesados “apuesten” para conseguir lo que quieren, de manera tal de obtener la mayor cantidad de dinero posible.

En el año 2002, con la participación de matemáticos expertos en Teoría de juegos, liderados por Ken Binmore, el gobierno inglés escribió sus reglas para otorgar la licencia para la *tercera generación de telefonía móvil*. Binmore y su equipo se pasaron dos años pensando en todas las posibles licitaciones (aunque esto suene exagerado). El resultado: el gobierno inglés consiguió 23.000 millones de libras esterlinas (algo así como 46.000 millones de dólares al cambio de media-

dos de 2007). Y eso, por haber usado la teoría de Nash, quien empezó hace cincuenta años analizando los juegos de ajedrez y de póquer, y ahora sus ideas impactan en la economía global y son capaces de generar miles de millones de dólares para los gobiernos (si es que se deciden a usarla).

Nash, en todo caso, hizo algo muy sencillo, que hasta parece increíble que nadie lo hubiera podido ver antes. Pero claro, los que merecen reconocimiento son aquellos que “miraron hacia donde todos apuntaban, pero *vieron* lo que nadie veía”. Quizá, ver lo obvio es tener una gran idea.

La Teoría de juegos estudia *cómo la gente toma decisiones cuando estas decisiones afectan a los demás y no sólo a ellos*. Por ejemplo, si usted entra en un negocio y compra un kilo de carne, eso no cambiará el precio de la carne. En cambio, si una compañía automotriz decide modificar el precio de uno de sus autos para seducir a los consumidores, eso implicará un cambio (eventual) en el precio de todos los autos similares. De hecho, cuando se modifica el precio de la nafta, tiene un efecto dominó que afecta a diferentes sectores de la sociedad.

En algún sentido, uno puede pensar la Teoría de juegos como el lenguaje matemático que describe cómo *interactúa* la gente.

Algunas personas actúan en forma más racional (o más irracional) que otras, y la Teoría de juegos analiza también esas situaciones. Por ejemplo, en las subastas o los remates por Internet, hay gente más profesional y *amateurs* que apuestan para conseguir algo por primera vez. Los que “regulan” el remate se ocupan de que la interacción sea *normal*, de manera tal que nadie corra ningún riesgo. Por eso son tan importantes las reglas de la subasta, por cómo afectan la conducta de la gente. Más aún: pequeñas modificaciones en esas reglas generan *grandes* modificaciones en el comportamiento de los usuarios.

Por ejemplo, podemos comparar las subastas de e-bay con las de Yahoo y Amazon. La gente de e-bay tiene una “hora límite”. Es decir, ellos instituyen que a “determinada hora” se termina la subasta. Amazon, en cambio, lo hace de otra forma. No es que no tenga un reloj, sino que el remate concluye *diez minutos después de que se hizo la*

*última oferta*. Esto implica que se prolongue el tiempo del remate. Por ejemplo, si usted hace una oferta justo un segundo antes de que el tiempo expire, el remate se prolongará otros diez minutos, *siempre y cuando no haya ninguna oferta en ese tiempo*. Si la hubiere, eso haría correr la finalización *otros diez minutos más*.

Las diferencias que esta variación en las reglas genera en la conducta de la gente son sorprendentes. Los usuarios de e-bay *acumulan o amontonan* sus apuestas a medida que se acerca el final, casi como si fueran francotiradores. En cambio, en Amazon uno no observa nada parecido.

Quiero terminar como empecé: es raro que, de una ciencia (la matemática) que tiene una rama llamada Teoría de juegos, se pueda decir que es aburrida, árida o que “yo no nací para esto”. Si es así, los comunicadores/docentes debemos estar haciendo algo mal. ¿Quién no jugó mientras fue niño? ¿Por qué no seguir haciéndolo ahora que somos adultos?

## La matemática y la niña que no sabía jugar al ajedrez

Esta historia le pertenece a Maurice Kraitchik. Cuando la leí pensé –una vez más– cómo puede ser que la matemática tenga tan mala prensa. Espero que disfrute de este ejemplo, que pone en evidencia cómo un simple recurso de lógica permite obtener un resultado *práctico* inmediato. Acá va.

Violeta, una niña de doce años que virtualmente no sabe nada sobre *ajedrez*, observa que su padre pierde dos partidas seguidas con sus amigos Alberto y Marcelo. Se acerca a él y le dice: “Papá, te aseguro que yo podría hacer mejor papel que vos frente a ellos. No sé mucho de ajedrez, pero me atrevo a jugarles a los dos, incluso en forma simultánea, y estoy segura de que, al menos no voy a perder las dos partidas como vos. Es decir: no te puedo decir que voy a ganar las dos, pero te puedo garantizar que seguro voy a hacer un mejor papel que vos”.

El padre la miraba sorprendido, sin poder entender lo que le decía Violeta, pero la niña pareció subir la apuesta.

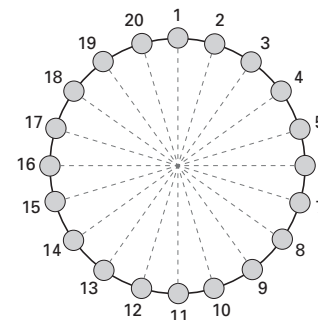
“Te propongo más, papá. Como yo sé que Alberto se considera peor jugador que Marcelo, decile que lo invito a que él juegue con piezas blancas. Eso sí, frente a Marcelo, las blancas las quiero usar yo. Y les ofrezco que juguemos ambas partidas en forma simultánea. Yo los enfrento a los dos al mismo tiempo”.

Eso fue lo que pasó. La pregunta es: ¿por qué podía Violeta asegurar que tendría mejores resultados que el padre con tanta seguridad? Aquí es donde conviene que me detenga un instante. Como es esperable, voy a escribir una respuesta (en el anexo con las soluciones), pero le propongo que *piense sola/o* el planteo de la historia, y trate de imaginar qué es lo que haría usted..

Más allá del cuento, lo que importa son los datos: Violeta jugaría con Marcelo llevando las piezas blancas, y con Alberto con las piezas negras. El otro dato que se conoce es que ambas partidas se jugarán en forma simultánea.

## Estrategia para ganar siempre

El que sigue es un juego que *enfrenta* a dos personas. Las reglas son muy sencillas. Se tiene un círculo formado por un número par de monedas de 1 peso. Para fijar las ideas, supongamos que hay 20 monedas numeradas (como se ve en la figura).



Cada jugador debe retirar o bien una o bien dos monedas cada vez que le toca jugar, pero si va a retirar dos, éstas tienen que ser consecutivas. Es decir, no se puede elegir dos que no estén contiguas en la distribución. La persona que se queda con la última moneda, *gana* el juego.

Supongamos que cada competidor juega a ganar, es decir, que elige en cada oportunidad lo que cree que es mejor para quedarse con esa última moneda. En esas condiciones, ¿hay alguna estrategia que pueda usar alguno de los jugadores de modo que garantice su triunfo?

Antes de avanzar, advierta que el párrafo anterior, aunque no parezca, contiene varias preguntas.

- a) ¿Hay alguna estrategia ganadora?
- b) ¿Para qué jugador? ¿El que juega *primero* o para el *segundo*?
- c) Si la hay, ¿cuál es?

### Miranda, Gardner y el partido de tenis<sup>22</sup>

Es curioso cómo un simple partido de tenis puede ayudar para razonar con lógica y proveer un resultado tan interesante.

Supongamos que Miranda y Rosemary jugaron un solo set en un partido de tenis, que terminó con el triunfo de Miranda 6-3. Se sabe además, que se quebraron el saque, en total, 5 veces.<sup>23</sup> La pregunta es: ¿quién sacó primero?

<sup>22</sup> Martín Gardner es el autor más reconocido en el mundo por sus aportes a la matemática, desde un lugar totalmente no convencional. Autor de muchísimos libros, editor de múltiples revistas de difusión, es considerado algo así como el gurú o ícono de la especialidad. Este problema está extraído de uno de sus libros (*The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*); conservé los nombres que él eligió para darles a las jugadoras una suerte de reconocimiento tácito a su contribución inigualable.

<sup>23</sup> Para aquellos que no saben nada de tenis –y no hay razones para suponer que uno *sí* sabe– escribo acá que se entiende que una jugadora gana un *set* cuando llega a obtener 6 *puntos*. Omito, por razones de necesidad, los casos que involucran *tie-breaks*, etc. Para el problema sólo hace falta saber que quien llega primero a ganar seis juegos, es quien gana el *set*. Por otro lado, cada jugador es quien saca

### División justa

Supongamos que usted (Alicia) y un amigo (Raúl) deciden apostar 50 pesos en un juego tan sencillo como el siguiente: se trata de tirar una moneda (o cualquier otro elemento y que la probabilidad de ganar esté dividida por mitades, o sea, 50% de posibilidades para cada uno). Cada uno pone 50 pesos en un pozo y juegan al mejor de siete tiradas. Es decir, quien logre acertar en cuatro oportunidades (de siete), se llevará el dinero (los 100 pesos). No hace falta que sean cuatro aciertos consecutivos, sino que se trata de acertar cuatro entre siete.

Ahora bien. Supongamos que en un momento determinado, cuando Alicia está ganando 3 a 2, se corta la luz, o se pierde la moneda con la que estaban jugando. Es decir, se produce algún acontecimiento que impide que siga el juego. Es importante notar que hasta ese momento todo se había desarrollado normalmente, y que la moneda fue arrojada cinco veces, de las cuales Alicia acertó en tres.

¿Qué hacer? (más allá de todas las bromas que se le ocurran y que puede usar en este punto). ¿Cómo dividir el dinero?

Antes de avanzar, quiero hacer una observación: no pretendo que usted (ni nadie) trate de encontrar una solución que sea *la correcta*. Porque no tiene siquiera sentido buscarla, ya que lo más probable es que cualquier *potencial solución* que uno crea haber encontrado se pueda rebatir. Lo que sí quiero, sin embargo, es mostrar que hay múltiples maneras de hacer algo racional.

Por supuesto, una manera posible es decir: cada uno se lleva el dinero que invirtió (los 50 pesos) y se termina la historia. Y estaría bien. Sólo que la persona que había ganado *tres* de las *cinco* tiradas (Alicia), a quien le faltaba *un acierto más* para llevarse el pozo, podría oponerse y decir: “No. No es justo que hagamos de cuenta que el juego no existió hasta acá. Yo gané *tres de cinco*, y estaba a

hasta que se define el punto; es decir, el saque se alterna entre ambos jugadores. Se entiende que el jugador que saca tiene una ventaja, por lo que se supone que debería ganar ese juego. Cuando esto no sucede, se dice que el rival *le quebró el saque*. De ahí la pregunta del problema.

punto de llevarme todo. ¿Por qué habríamos de dividirlo por la mitad? Esa división no es justa para mí". Y creo que convendrá conmigo en que Alicia tendría suficientes razones para no querer dividir el dinero por igual.

Y entonces, ¿qué hacer?<sup>24</sup>

Al margen de dividir por la mitad como si el partido no hubiera empezado, hay otra forma que surge de inmediato: si Alicia estaba ganando 3 a 2 y uno quisiera conservar esa proporción, lo que se puede hacer es dividir el dinero de esa forma: de cada cinco unidades, tres son para ella. Luego, como "tres de cinco" significa el 60%, entonces, Alicia se quedaría con 60 pesos y Raúl con 40. La manera de justificar esto es lo que habitualmente se hace en los negocios, en donde el dinero se reparte de acuerdo con el *capital invertido*: quien invirtió 60%, retira el 60% de las ganancias.

Sin embargo, esto no agota las posibilidades: si yo fuera el abogado defensor de Alicia (en un juicio imaginario), le diría al juez que a ella le faltaba sólo un acierto más para llevarse *todo* el dinero. En cambio, a Raúl le hacían falta dos aciertos para quedarse con el pozo. Si uno respetara esta nueva proporción, Alicia tendría una ventaja de 2 a 1 (ya que Raúl tendría que acertar 2 de 3 para ganar). En este caso, entonces, guardando esta nueva proporción, Alicia se debería llevar el 66,67% del dinero y Raúl el 33,33%. O sea, \$ 66,67 para ella y \$ 33,33 para él.

Espero que esté de acuerdo conmigo en que no hay una solución única. Ni mucho menos.

Le voy a proponer otra manera de pensar el mismo problema.

Uno podría contabilizar qué pasaría si se tirara la moneda una sola vez más. En ese caso, los dos posibles resultados son:

- a) 4 a 2 para Alicia (y se lleva todo), o bien,
- b) un empate, 3 a 3.

<sup>24</sup> Este problema fue discutido por Pascal y Fermat en un intercambio de cartas hace más de tres siglos (recuerden que no había Internet hace 350 años). Ambos fueron dos de los pioneros creadores de lo que se conoce con el nombre de Teoría de probabilidades, y la situación planteada sobre la *división justa* es uno de los *clásicos*.

En consecuencia, en este caso Alicia tendría que llevarse el 75% del pozo. ¿De dónde sale este número? Esto surge como *promedio* entre el 100% (si gana en la primera tirada) y del 50% que tendría si la pierde. De ahí el 75%.

Con este análisis, a Alicia le correspondería el 75% del pozo (50% de entrada más el otro 25%) y a Raúl, sólo el 25%. O sea, la división en este caso representa una proporción de 3 a 1.<sup>25</sup>

Resumiendo, frente a un resultado de 3 a 2 en favor de Alicia, hemos visto cuatro posibles instancias:

- a) Repartir el dinero en partes iguales, como si el juego no hubiera existido.
- b) Dividir 60% para Alicia y 40% para Raúl.
- c) Darle el 66,67% a Alicia, y el 33,33% a Raúl.
- d) Darle el 75% a Alicia y el 25% a Raúl.

¿Qué enseña esto? Es obvio que a uno le gustaría que las veces en las que uno tiene que optar en la vida cotidiana, las situaciones fueran siempre *binarias*. Es decir, cuando una de las opciones es la que está "*mal*" y la otra, la que está "*bien*". "Blanco" o "negro". "Correcto" o "incorrecto". Sí, todo funcionaría bárbaro: sólo tendría que tener la suerte de elegir la opción adecuada cada vez.

Sin embargo, no es así. Las alternativas que planteé más arriba sirven para *modelizar* situaciones reales. *Lo mejor no* es hacer de cuenta que no hubo juego, porque lo hubo. Tampoco es justo dividir por la mitad, porque Alicia iba adelante y no quiere *perder* esa condición. Pero, decidir cuán adelante iba, defender sus intereses, sin afectar los de Raúl, no es tarea sencilla, y requiere de acuerdos y compromisos. En definitiva, de eso se trata la vida: de constantes elecciones que uno

<sup>25</sup> Usando el análisis de qué es lo que sucedería tirando la moneda sólo una vez más, ¿qué pasaría si en lugar de ir 3 a 2, el juego estuviera 3 a 1 en favor de Alicia? ¿Qué hacer entonces? En ese caso, los resultados posibles son los siguientes: 4 a 1 si gana Alicia en la tirada de la moneda, o se vuelve a la situación 3 a 2, si la pierde. En la primera situación, es un 100% del pozo. En la segunda (de acuerdo con lo que vimos más arriba), es 75%. Si uno saca el promedio de las dos, a Alicia le corresponde el 87,5% del dinero.

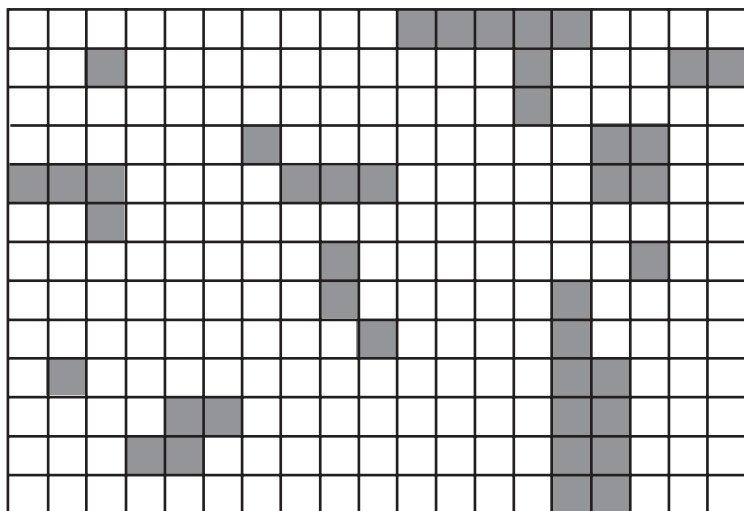


quisiera tomar en la forma más *racional* y *educada* posible. La matemática suele ayudar.

### Juego de la vida

Lo que sigue es un juego espectacular. Se llama Juego de la vida. En realidad, lo interesante de este juego es que uno participa *una sola vez*, y eso sucede al principio. Luego, el juego se *juega solo*. Me explico: suponga que tiene un tablero de ajedrez, pero no de 8 casillas de lado, sino tan grande como para que no se termine nunca, vaya para donde vaya.

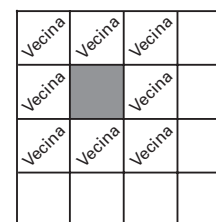
Cada casilla puede estar vacía o contener una “célula” viva o activa (el equivalente de una ficha en el juego de damas, por ejemplo).



Como se ve, los casilleros que aparecen en color *negro* son los que están ocupados por una “célula” o una ficha. Los blancos son los que

están vacíos (o también se puede interpretar como que hay una célula muerta). Usted empieza con el número de fichas que quiera. Como el tablero es tan grande, si quiere distribuirlas todas, no habrá problemas de lugar.

Una vez que las fichas están distribuidas, se pone en marcha el proceso. Como se ve, cada “casillero” tiene alrededor *ocho* vecinos (como si fuera al norte, sur, este, oeste, nordeste, noroeste, sudeste y sudoeste).



El juego continúa así:

- Si una célula tiene *exactamente dos o tres* células alrededor, sobrevive para el próximo paso.
- Si una célula tiene *una o ninguna célula a su alrededor*, se muere (por aislamiento).
- Si una célula tiene *cuatro o más* células alrededor, *también se muere*, pero por una *superpoblación de células: no alcanzaría la comida*.
- Si hay una casilla *vacía*, que tiene *exactamente tres células* alrededor, entonces se produce un *nacimiento* en el próximo paso.
- Por último, las células nacen, permanecen o desaparecen *todas al unísono* al cambiar de un estado a otro.

Como se ve, las reglas son realmente muy sencillas. Todo lo que uno tiene que hacer es establecer con cuántas fichas va a jugar y cómo las va a distribuir. Una vez hecho esto, uno ha establecido una configuración inicial. A partir de ahí, el juego *se juega solo*. Por ejem-

plo, supongamos que con cada segundo cambia el estado y se modifica la posición inicial.

Veamos algunos ejemplos.

	Posición inicial	Luego de 1 segundo	Luego de 2 segundos	Luego de 3 segundos	Luego de 4 segundos
1					
2					
3					
4					

- 1) Se mueren.
- 2) Se estabiliza en el cuadrado.
- 3) Cíclico (vuelve a la posición original cada dos segundos).
- 4) Esta "bajó" un escalón en cuatro segundos.

Así seguirá siempre.

Como escribí al principio, su participación en el juego *sólo* consistirá en elegir el número de fichas que va a usar y cómo las va a distribuir en el tablero. Una vez que ya eligió qué disposición va a dar

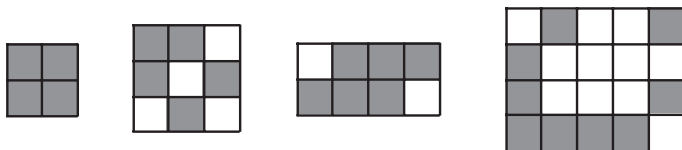
a las fichas, su participación terminó. Todo lo que resta es observar cómo *evoluciona el tablero* a medida que corre el reloj. De hecho, podríamos pensarlo como un *modelo de sociedad*, en donde uno distribuye un número de personas en una comunidad, y ve cómo evoluciona (naturalmente, con las reglas *artificiales* y *discrecionales* que pusimos más arriba).

Este juego fue diseñado en 1970 por un matemático inglés muy famoso, John Conway. Uno podría pensar la configuración inicial como la *primera generación* del sistema. Cada segundo (por poner un ejemplo), el sistema *evoluciona o cambia*, siguiendo las reglas establecidas más arriba, produciéndose muertes y nacimientos simultáneamente. Este juego puso a Conway en un lugar privilegiado y se difundió en el mundo gracias a las columnas de Martin Gardner, uno de los pioneros en la difusión de la ciencia.

Lo invito a pensar en los siguientes problemas:

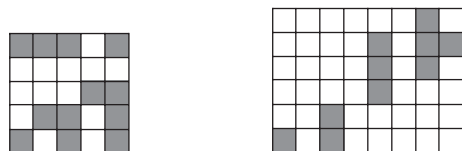
- a) ¿Puede encontrar alguna configuración inicial que *no cambie* con el paso del tiempo, que permanezca *estática*? (Claro, diferente del modelo que puse más arriba.) (Las que existen se llaman *vidas quietas*.)
- b) ¿Se puede encontrar una configuración que evolucione en forma cíclica? Es decir, que empiece de una forma, vaya pasando por diferentes estados, y vuelva a la posición original. (También distinta del caso que figura más arriba.)
- c) ¿Es posible encontrar maneras de empezar, de manera tal que *no* se vuelvan simétricas a medida que pasa el tiempo? (Simétrico, en este contexto, quiere decir que si uno *rota* el resultado, obtiene la misma configuración.)
- d) ¿Es capaz de encontrar una configuración que *no tenga un padre*? Es decir, ¿puede encontrar un estado que *no* pueda provenir de ningún otro?
- e) ¿Se pueden encontrar estados que se vayan *deslizándose* por el tablero a medida que avanza el tiempo?
- f) ¿Y configuraciones que se extingan? Es decir, cuando, en un número finito de pasos, *todas las células se mueren*. (Una vez más, diferente del ejemplo que puse más arriba.)

A continuación, le presento algunos ejemplos de configuraciones iniciales, para entretenerse siguiendo su evolución. Con todo, lo interesante es que usted empiece solo/a, con una posición inicial propia, y continúe su recorrido para ver qué destino tiene.



En el juego original, Conway ofrecía un premio de 50 dólares a quien propusiera patrones iniciales que *crecieran indefinidamente*. Él sospechaba que no existían y, como no podía demostrarlo, decidió poner a prueba su hipótesis con la gente. No tardaron mucho en contradecirlo. Un mes después, noviembre de 1970, un equipo del MIT (Instituto de Tecnología de Massachusetts), liderado por Bill Gosper, encontró no uno, sino varios ejemplos de lo que el propio Conway no había podido descubrir.

En la figura que sigue, se ven tres configuraciones que *crecen indefinidamente*, que si bien no son las que originariamente encontraron Gosper y sus discípulos, ponen en evidencia (una vez más) que lo que uno no logra quizá muchos otros sí, y eso no va en detrimento de nadie.<sup>26</sup>



<sup>26</sup> En <http://www.math.com/students/wonders/life/life.html> hay una manera de poder probar configuraciones en forma interactiva. A aquellos a quienes les interese, les sugiero que prueben allí. Obviamente, hay muchísimas páginas en Internet dedicadas al “juego de la vida”. Yo propongo sólo una de ellas.

El Juego de la vida es sólo un ejemplo de los denominados “autómatas celulares”, es decir, un sistema que sigue ciertas reglas que se especifican de antemano y que evoluciona por sí mismo.

La investigación en este campo de la matemática ha sido muy intensa en los últimos años, sobre todo porque sirven para “modelar” o “simular” sistemas de la vida real. El Juego de la vida es uno de los más sencillos.

### Transitividad y los tres dados de colores

Supongamos que dos amigos suyos vienen a pasar un domingo con ganas de jugar a los dados. No bien llegan, le dicen que traen dados que son diferentes de los comunes. En principio, no son blancos, sino que tienen cada uno un color diferente: rojo, azul y verde. Además presentan otra particularidad: no tienen los números del 1 al 6 como los dados convencionales, sino que se han distribuido entre ellos los primeros 18 números... .. de una forma “no convencional”.

Es decir, cada uno tiene en sus caras los siguientes números:

Dado Rojo:	5	7	8	9	10	18
Dado Azul:	2	3	4	15	16	17
Dado Verde:	1	6	11	12	13	14

¿Se entiende? Por ejemplo, si uno tiene el dado azul, y lo hace rodar, los resultados posibles son: 2, 3, 4, 15, 16 o 17.

Cada persona elige un dado, y el juego consiste en lo siguiente: cuando un competidor enfrenta a un rival, cada uno hace rodar su dado y el que saca el número más grande, gana. Si lo dejaran elegir primero, ¿qué dado elegiría?

Estudie un rato las *caras* de cada dado, y *elija* el que crea le va a dar más posibilidades de ganar.

Lo interesante de este ejemplo es que no hay un dado que garantice siempre el triunfo.

Si uno realiza una tablita con todos los resultados posibles entre todos los posibles *pares de dados*, se obtiene este resultado:

rojo	5	7	8	9	10	18
azul	2	3	4	15	16	17
verde	1	6	11	12	13	14
rojo vs azul	5	7	8	9	10	18
2	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
3	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
4	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
15	azul	azul	azul	azul	azul	rojo
16	azul	azul	azul	azul	azul	rojo
17	azul	azul	azul	azul	azul	rojo
En este caso, el rojo gana 21 veces y el azul gana 15 Rojo > Azul						
rojo vs verde	5	7	8	9	10	18
1	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
6	verde	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
11	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
12	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
13	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
14	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
En este caso, el verde gana 21 veces y el rojo gana 15 veces Verde > Rojo						
azul vs verde	2	3	4	15	16	17
1	azul	azul	azul	azul	azul	azul
6	verde	verde	verde	azul	azul	azul
11	verde	verde	verde	azul	azul	azul
12	verde	verde	verde	azul	azul	azul
13	verde	verde	verde	azul	azul	azul
14	verde	verde	verde	azul	azul	azul

En este caso, el azul gana 21 veces y el verde gana 15 veces  
Azul > Verde

Resumo acá los resultados:

El rojo le gana al azul 21 veces sobre 36 posibles.

El verde le gana al rojo también 21 veces sobre 36.

Y finalmente, el azul le gana al verde también 21 sobre 36.

Si usamos de la notación > cuando un dado gana más veces que otro, se tiene esta distribución:

Rojo	>	Azul
Verde	>	Rojo
Azul	>	Verde

¿Qué es lo que llama la atención? Lo sorprendente es que, si bien el rojo le gana al azul, y el azul le gana al verde, cuando compiten el rojo y el verde, no gana el que uno intuye que debe ganar (que en este caso sería el rojo), sino que gana el verde. Esto es lo raro. Inadvertidamente, por lo general uno hace fuerza para que se cumpla una ley o propiedad que siente que se está violando en este caso: la *transitividad*.

Le propongo un par de ejemplos para pensar. Reflexionemos juntos para ver si podemos *descubrir un patrón*. Es decir, algo que se repita o que los ejemplos tengan en común.

#### EJEMPLO 1

Si A es hermano de B y B es hermano de C, ¿se puede concluir que A y C son hermanos?

#### EJEMPLO 2

Si la calle Rivadavia es paralela a la calle Corrientes y la calle Corrientes es paralela a Córdoba, ¿se puede concluir que Rivadavia y Córdoba son paralelas?

#### EJEMPLO 3

Si el número *a* es *mayor* que el número *b*, y el número *b* es *mayor* que el número *c*, ¿se puede concluir que el número *a* es *mayor* que el número *c*?

Usando los símbolos que aporta la matemática, uno escribiría el Ejemplo 3, así:

y

$$\begin{array}{l} \text{si } a > b \\ \text{si } b > c \end{array}$$

¿se puede concluir que

$$a > c ?$$

#### EJEMPLO 4

Si el señor *A es el padre* del joven B, y si el joven B (no tan joven) es el *padre* del (más) joven (aún) C, ¿se puede concluir que A es el padre de C?

(Voy a escribir un par de ejemplos más, pero estoy seguro de que ya se ha dado cuenta hacia dónde voy.)

#### EJEMPLO 5

Si la avenida Corrientes es perpendicular a la avenida 9 de Julio y la avenida 9 de Julio es perpendicular a la avenida Santa Fe, ¿se puede concluir entonces que las avenidas Corrientes y Santa Fe son perpendiculares?

#### EJEMPLO 6

Si el equipo de fútbol A ganó los diez partidos que jugó en los últimos cinco años contra el equipo B, y a su vez, el equipo B ganó los diez partidos que jugó en el mismo período al equipo C, ¿se puede concluir que, en esos mismos cinco años, el equipo A le ganó los partidos al equipo C?

Bueno, aquí paro. Creo que ya advirtió que hay algunos *patrones* en todos estos ejemplos.

En cada ejemplo, hay involucrada una *relación*.

En el primero, la relación es: “*ser hermano de*”.

En el segundo, la relación es: “*ser paralela a*”.

En el tercero, “*ser mayor que*”.

En el cuarto, “*ser padre de*”.

En el quinto, “*ser perpendicular a*”.

Y en el último, “*haberle ganado durante cinco años todos los partidos a*”.

En todos los ejemplos, uno *compara y trata de sacar conclusiones*.

Como habrá notado, las respuestas son variadas.

En los casos 1, 2 y 3, uno concluye que *sí*, que se puede afirmar lo que se pregunta al final. Es decir, los hermanos *trasladan* esa condición, las calles *paralelas* también, y lo mismo ocurre con los números que son *mayores* que otros.

En el caso 4, no. Claramente es falso que si A es padre de B, y B es padre de C, *A puede ser el padre de C*.

En el caso 5, tampoco. De hecho, la avenida Corrientes resulta *paralela* a la avenida Santa Fe y no perpendicular a ella, aunque ambas sean *perpendiculares* a la avenida 9 de Julio.

Y en el caso 6, ni hablar. Que un equipo le gane o le hubiera ganado muchos partidos a otro, y éste hubiera hecho lo mismo con un tercero, *no permite sacar ninguna conclusión entre el primero y el tercero*.

Cuando una propiedad se *traslada* de esta forma, se la llama *transitiva*. Ser “hermano de”, “paralelo a” o “mayor que” son relaciones *transitivas*.

MORALEJA FINAL: el ejemplo de los dados de tres colores diferentes muestra cómo uno, en la vida cotidiana, *quiere* que las relaciones sean transitivas, pero esto, como se ve en los casos que expuse más arriba, no necesariamente es cierto, por más fuerza que uno haga.

Y si no, confronte el ejemplo 6 y dígame: ¿no querría que esa relación en particular *fuera la más transitiva de todas*?

## ¿Cómo adivinar un número?

¿No sería increíble que una persona pudiera *leer* el pensamiento? ¿Estaremos cerca de que eso suceda, o no pasará nunca? Supongamos que le propongo que piense un número y le digo que luego de hacerle algunas preguntas *lo voy a adivinar*. Hay muchísimos de estos “acertijos” dando vueltas. ¿En dónde radica la gracia, entonces? Me parece que el valor de este tipo de problemas reside en el desafío que nos presenta el tratar de descubrir por qué funciona.

Estoy seguro de que nadie cree que quien lo practica tenga la facultad de leer las mentes de los otros. Si así fuera, esa persona estaría haciendo otras cosas en lugar de adivinar números que piensan los amigos. Pero, como decía antes, la gracia de lo que sigue es *descubrir el porqué*.

- 1) Pídale a alguien que piense un número (por ejemplo, digamos que la otra persona pensó el número 11).
- 2) Dígale que lo multiplique por 3 y que no le diga el resultado (en este caso, la respuesta será 33).
- 3) Pídale que le diga si el número que obtuvo es par o impar (en el caso que nos ocupa, es impar).
- 4) Dígale que lo divida por 2 si es par, y si es impar que le sume 1 y que lo divida por 2. (En nuestro caso, al sumarle 1 se obtiene 34 y al dividirlo por 2, el resultado es 17.)
- 5) Ahora, dígale que lo multiplique por 3 (en nuestro caso, el resultado es 51).
- 6) Al número que obtuvo, que lo divida por 9, sin importar el resto. (En nuestro ejemplo, al dividir 51 por 9, se tiene 5, ya que  $5 \times 9 = 45$ , y sobran 6, pero no importa. Luego, la respuesta, en este caso, será 5.)
- 7) Una vez que le den el resultado, si en el paso 3 la respuesta fue par, entonces usted lo multiplica por 2 y el resultado es el número que la persona había pensado originalmente. Si en el paso 3 la respuesta fue impar, multiplíquelo por 2 y súmele 1. (En nuestro ejemplo, como la respuesta había sido

impar, hay que multiplicar el número 5 por 2 y luego sumarle 1. Luego, la respuesta es 11, que es el número que habíamos elegido al principio. Es decir, el sistema, al menos en este ejemplo, ¡funciona!

Ahora bien, ¿por qué funciona?

Voy a escribir la solución más abajo, pero lo interesante de este problema es *descubrir uno mismo* la solución o, si lo prefiere, al menos intentarlo.

Elijamos juntos un número cualquiera. Aunque no esté con usted, verá cómo funcionamos en equipo. El número que elija será o bien par o bien impar. Si es *par*, se podrá escribir de la forma  $2 \times A$ . En cambio, si es *impar* se escribirá de la forma  $2 \times A + 1$ .

Por ejemplo, si el número que usted y yo elegimos fuera el 18, entonces

$$18 = 2 \cdot 9 \text{ (o sea, en este caso, el número } A = 9\text{)}$$

En cambio, si eligiéramos el 27, entonces

$$27 = 2 \cdot 13 + 1 \text{ (y en este caso el número } A = 13\text{)}$$

Miremos primero qué pasa si el número que elegimos es *par*. Cuando lo multiplicamos por 3, se obtiene

$$3 \cdot (2 \cdot A) = 6 \cdot A$$

Luego hay que dividirlo por 2, y se tiene

$$3 \cdot A$$

Después, hay que multiplicarlo por 3 otra vez, y se obtiene:

$$9 \cdot A$$

Cuando lo divide por 9, se tiene el número  $A$ . Por lo tanto, cuando nuestro interlocutor nos pide que le digamos el número al que llegamos, le decimos: “Llegamos al número  $A$ ”. Como en el paso 3 le habíamos dicho *par*, entonces él (o ella) lo multiplica por 2 y nos dice: “El número que habían elegido era  $2 \times A$ ”, ¡que es la respuesta correcta!

Por otro lado, si empezamos en número *impar*, tiene que ser de la forma  $(2 \times A + 1)$ .

Así, cuando nos piden que lo multipliquemos por 3, queda:

$$3 \cdot (2 \cdot A + 1) = 6 \cdot A + 3 \text{ (¿me sigue con esta cuenta?)}$$

Y acá es cuando nos preguntan si es *par* o *impar*. Bueno, este número tiene que ser impar, porque  $6 \times A$  es par seguro (porque es múltiplo de 6), y al sumarle 3 lo transformamos en número impar. Seguimos. Nos piden ahora que le sumemos 1 y luego lo dividamos por 2. Con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} &6 \cdot A + 4, \text{ y después, lo dividimos por 2:} \\ &3 \cdot A + 2 \end{aligned}$$

A este resultado, nos piden que lo multipliquemos por 3 otra vez.

$$3 \cdot (3 \cdot A + 2) = 9 \cdot A + 6$$

Luego, cuando nos dicen que lo dividamos por 9, va a resultar el número  $A$  otra vez (porque descartamos el resto, que en este caso es 6).

Y ahora, cuando nos piden que digamos el número al que arribamos, decimos: “Llegamos al número  $A$ ”. Nuestro interlocutor sabe lo que tiene que hacer: lo multiplica por 2 y le suma 1. O sea,  $2 \times A + 1$ , y llega justo al número con el que habíamos empezado.

No es magia ni nadie adivina nada. Sólo un par de razonamientos encadenados que permiten llegar a la conclusión acertada.

## Ternas consecutivas en una ruleta

Supongamos que va a un casino mientras está cerrado, y advierte que hay una ruleta en preparación. Están todos los elementos, pero falta distribuir los números. Para mayor comodidad, vamos a suponer que esta ruleta es especial: no tiene un lugar para ubicar al número cero.

Van a dejar que usted distribuya los números del 1 al 36, de la forma que quiera. Pero un señor le pregunta antes de que lo haga: ¿es posible hacer una distribución de manera tal que no haya tres números seguidos cuya suma sea 55 o más?

Esta pregunta lo deja perplejo, porque usted iba a distribuir los números sin ninguna restricción, dejándose llevar por su instinto y gusto, y ahora le complicaron la vida. ¿Se puede? Digo, ¿se pueden distribuir los números del 1 al 36 en una ruleta de manera tal que nunca haya tres consecutivos que sumen 55 o más?

Como siempre, lo más entretenido es pensar uno mismo. En este caso, el planteo presenta dos problemas en uno:

- Decidir si es posible o no (distribuir los números sin que haya tres consecutivos que sumen 55 o más).
- Si existe esa distribución, exhibirla. Pero, si cree que no es posible, tendrá que demostrarlo. No sólo que usted no pudo, sino que jamás habrá una persona que pueda hacerlo. Y habrá que dar algún argumento que convenza a cualquiera que intente hacerlo, que no vale la pena que pruebe, porque va a fallar (inexorablemente).

Ahora, lo dejo en compañía de usted mismo (lo mejor que le podría pasar).

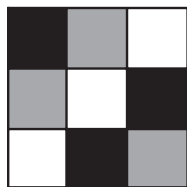
La demostración la encontrará en el anexo con las soluciones.

Tripos<sup>27</sup>

Éste es un juego que invita a pensar estrategias para ganar. Se aprende y se juega fácil, pero para ganar... hay que pensar. Parto de la base de que todo el mundo sabe jugar al Ta-te-ti. Tripos es una variación del Ta-te-ti, presentada por ese espectacular personaje que es Martin Gardner. ¿Cuál es el problema básico con el Ta-te-ti? Que se transforma en un juego aburrido, porque uno encuentra la estrategia ganadora muy rápidamente. Más aún: el que comienza el juego tiene tanta ventaja que arruina el deseo de jugar que podría tener el segundo competidor; nadie quiere jugar sabiendo que no puede ganar. Es decir, a lo más que puede aspirar el segundo jugador es a no perder.

De hecho, no hay una estrategia ganadora para el primer competidor, sencillamente porque si el segundo participante sabe qué hacer (aunque el primero ocupe el cuadrado del centro), el empate está garantizado.

El Tripos consiste de un dibujo de 3 x 3 (como el Ta-te-ti), con una diferencia: cada uno de los nueve cuadraditos tiene un color. En total, hay tres colores y la distribución es la siguiente (en este caso lo mostraremos con gamas de blanco, negro y gris):



Participan dos jugadores. Uno usa cruces y el otro, círculos. Se alternan los turnos para jugar. Cada uno elige un cuadradito libre para

<sup>27</sup> Para quienes son aficionados a este tipo de juegos, *tripos* es también conocido con el nombre de "Pappu's Mousetrap", o lo que sería su equivalente "La trampa para ratones de Pappu".

ubicar su símbolo (una cruz o un círculo). El juego termina cuando uno de los jugadores completa (como en el Ta-te-ti) una columna o una fila, pero también cuando ubica sus cruces o círculos en lo que llamo una diagonal ampliada (o sea, tres que tengan el mismo color).

Como decía más arriba, si bien Tripos es similar al Ta-te-ti, tiene algunas diferencias esenciales:

- No hay una casilla privilegiada, como la del medio en el Ta-te-ti.
- En Tripos cada cuadradito aparece en una sola fila, una sola columna y en una sola diagonal ampliada (o sea, en una diagonal del mismo color).

Por otro lado, uno de los detalles que el Ta-te-ti no contempla es que quien comienza tiene cinco casillas para elegir, mientras que quien juega segundo, tiene sólo cuatro. En Tripos, en cambio, es así: como regla del juego se establece que cada jugador ubica cuatro cruces o círculos, no más. Pero si el que juega primero no puede ganar en cuatro movidas, entonces gana el segundo jugador. Ésta es otra diferencia importante: en Tripos ino hay empate!

## ESTRATEGIA GANADORA PARA EL TRIPOS

Antes de escribirla, una sugerencia importante: juegue usted. Intente buscar cómo jugar, cómo ganar, tropiece con los problemas, gane, pierda, piense. No tiene sentido (creo) que avance en la lectura sólo para aprender que *hay una manera de ganar*. Eso se lo digo yo de antemano. El valor está en que sea usted quien pueda encontrar las dificultades y de esa forma podrá disfrutar, no sólo de encontrar la estrategia ganadora, sino que, aunque no la descubriera, va a poder valorar aún más que ésta exista.

Ahora sí, aquí hay una manera de hacerlo. Empiezo por numerar los cuadraditos. La numeración que elegí es arbitraria. Usted puede elegir la que quiera.



5	7	6
9	8	4
1	2	3

Fíjese ahora lo que sucede. Cada cuadradito está relacionado con muchos otros, aunque no con todos. Cuando digo relacionado entiendo que forma parte de una columna, o fila o diagonal ampliada.

Por ejemplo: el cuadradito con el número 1 está relacionado con el 9 y el 5 porque forman parte de la misma columna, con el 2 y el 3 porque forman parte de la misma fila, y con el 8 y el 6 porque forman parte de lo que dimos en llamar diagonal ampliada. Sin embargo, el número 1 no está relacionado ni con el 4 ni con el 7.

Lo voy a anotar así:

(1, 4, 7)

De la misma forma, lo invito a que, antes de seguir leyendo, descubra usted las otras dos ternas de números que no están conectados.

Acá van:

(2, 6, 9)

(3, 5, 8)

O sea, se tienen estas tres ternas de cuadraditos no conectados.

Ahora, quiero que me siga en el siguiente razonamiento, porque voy a describir una estrategia ganadora para el jugador que empieza primero.

Lo invito antes a que juegue al Tripas muchas veces, para poder familiarizarse con los problemas que presenta y aprender a pensar uno mismo qué hacer ante determinadas situaciones. Una vez que recorrió

ese camino, lea la estrategia que sirve para garantizar que, si la usa quien juega primero, ganará siempre.

Para fijar las ideas, supongamos que usted empieza primero y que pone una cruz en el casillero que figura con el número 1. Acá empiezan las posibles alternativas para el segundo jugador. Uno podría decir (si es que juega segundo):

- Me conviene jugar en un cuadradito que no esté conectado con el 1.
- Me conviene poner un círculo en un cuadradito que sí esté conectado con el 1.

Empecemos analizando la posibilidad a). ¿Por qué le convendría al segundo jugador ubicar su círculo en un cuadradito que *no* esté conectado con el 1? Porque quiere tener la libertad de elegir jugar activamente y no en forma defensiva. Es decir: ¿para qué competir en tratar de llegar a una columna, o una fila o una diagonal ampliada que ya tiene un cuadradito ocupado? Con esta idea, supongamos que el segundo jugador elige el número 4 (podría elegir el 7 y sería igual).

En este caso, el primer jugador elige el otro integrante de esa misma terna ... es decir, en este caso el 7.

En el dibujo queda así:

	X	
		O
X		

Ahora, le toca el turno al segundo jugador. Pero fíjese que éste, si quiere ganar, está obligado a ocupar ciertos cuadraditos. Si juega en el cuadradito que tiene “arriba” o “abajo”, perdió.

	X	O
		O
X		

Porque ahora, el primer jugador usará la cruz para ponerla en el cuadradito que falta en la tercera columna, y ya no importa lo que haga el segundo jugador, el primero ganará siempre. (Haga usted los dibujos que faltan, para convencerse.)

De la misma forma, utilice todas las alternativas que tenga el segundo jugador para seguir, y verá que, haga lo que haga, el primer jugador gana siempre.

Ahora, analicemos la posibilidad b).

Es decir, en el caso a), el segundo jugador había optado por jugar ofensivamente, utilizando su propia estrategia, y por eso eligió el cuadradito número 4. Pero no funcionó. ¿Qué pasa si ahora elige otro cuadradito que *sí* esté relacionado con el número 1? En este caso (y le sugiero que lo verifique), el primer jugador –en su segundo movimiento– siempre tiene la opción de elegir un cuadradito que obligue al segundo jugador a elegir uno que esté en la terna de los no relacionados. Por ejemplo, supongamos que el primer jugador ocupó el cuadradito 1 y que el segundo eligió el número 5. En este caso, el primer jugador buscará los números que no están relacionados con el 5, y descubre la siguiente terna:

(3, 5, 8)

O		
X		

¿Qué cuadrado le conviene elegir, de manera de forzar al segundo jugador a que tenga que ocupar o bien el 3 o bien el 8? En este caso, la situación es la siguiente:

O		
	8	
X		3

Y le toca jugar al primero. ¿Dónde poner la cruz, para obligar al segundo jugador a tener que usar el 3 o el 8?

En este caso, usa el primero de la tercera columna, o sea, el número 6, y se tiene la siguiente situación:

O		X
X		

Y a partir de aquí, el segundo jugador perdió, porque está obligado a jugar en el cuadradito del medio, pero, de esa forma, ya tiene usados dos de sus círculos en cuadrados que no están relacionados.

O		X
	O	
X		

Ahora, el primer jugador usa su cruz para ponerla en la última columna, en la tercera fila, y ésta resulta ser la jugada final, porque el segundo jugador ya no puede tatar los dos agujeros al mismo tiempo.

○		×
	○	
×		×

Todo este sistema de estrategias tiene que ver con la matemática. Con la lógica, con la capacidad de pensar un poco más en profundidad, con conjeturar posibles alternativas que use el oponente, con situaciones que eventualmente entrenan para lo que pasará en la vida real.

No puedo decir acá (y además estaría mal si lo hiciera) que este juego se utiliza en tal o cual circunstancia de la vida real. No lo sé, pero tampoco importa. Lo que sí interesa es saber que uno se prepara para pensar y, cuantos más caminos haya recorrido, mejor preparado estará.

## Nim

Hace tiempo que tengo la tentación de incluir un problema con un planteo elemental pero muy difícil de resolver. Sí, difícil. No sólo que la solución no se me ocurrió a mí (lo cual no significa nada), sino que creo que es muy difícil en general. Su atractivo radica en que es muy fácil de jugar, y muy interesante para pensar. Y si bien uno podría preguntarse: “¿Cómo puede ser que a alguien se le haya ocurrido esto?”, tiene la particularidad de que la estrategia ganadora se puede aprender (después de un poco de entrenamiento) y, por lo tanto, permite ganar siempre. Si usted tiene tiempo y ganas de desafiar, ésta es una buena oportunidad. Si no, puede pasar a la historia que sigue. Acá va.

El juego del que hablaba es uno de los más antiguos, pero no por eso menos sorprendente, que ofrece la Teoría de juegos, una de las

ramas más atractivas de la matemática. Se llama Nim<sup>28</sup> y las reglas para jugarlo son muy sencillas. A medida que uno adquiere experiencia, comienza a planificar estrategias para ganar. Al principio, es desconcertante, pero luego resulta elegante y seductor.

Uno empieza con un cierto número de monedas (o fósforos, o palillos o protos) que aparecen distribuidas en diferentes filas. No hay restricciones: usted dispone con cuántas filas se va a jugar, y también hay libertad para decidir con cuántas monedas por fila.

Participan del juego dos competidores. Cada uno puede “retirar” de cada fila la cantidad de monedas que elija, incluso todas de una vez. Eso sí: sólo de una sola fila. Luego, le toca al siguiente jugador, que tiene que hacer lo mismo: retirar un número cualquiera de monedas, siempre seleccionadas de una sola de las filas. Se van alternando uno y otro, hasta que no queden más monedas.

Gana el que retira la última moneda. Es decir, gana, de los dos competidores, el último que se queda con la última (o últimas) moneda(s).

## ESTRATEGIA GANADORA

Antes que nada, al juego *hay que jugarlo*. Es decir: juéguelo. No una vez, sino muchas. Enfréntese con diferentes situaciones. Analice qué hacer; prevea qué podría hacer su rival. Disfrute de hacerlo. Cada situación es distinta y cada movimiento del otro jugador podrá sorprenderlo con alguna variante que no consideró.

Es más: me atrevo a decir que debería parar de leer acá, y retomar sólo cuando haya jugado mucho, o al menos cuando ya le tenga tomado el pulso al Nim. ¿Qué gracia tiene, si no, leer cómo hacer para “ganar siempre”?

Una vez que practicó muchas veces (y encontró múltiples dificultades, ganó y perdió), entonces sí, cabe preguntarse si habrá alguna estrategia ganadora. Es decir, ¿será posible encontrar alguna forma

<sup>28</sup> El Nim aparece en la literatura como *inventado* por C. L. Bouton, de la Universidad de Harvard, alrededor de 1901. Se supone que el nombre (Nim) tuvo su origen en la palabra alemana *nehmen* (“tomar” o “retirar”), cuya forma imperativa en singular es *nim*.

de jugar, para alguno de los dos participantes, de manera que quien la aplique gane siempre, más allá de lo que haga el oponente?

Por último, el hecho de que haya una estrategia ganadora no significa que sea fácil descubrirla, ni mucho menos. Más aún: en este caso, sí, la hay, pero creo que *es muy difícil* de encontrar. Por eso, lo atractivo es jugar al juego y planificar qué hacer, aunque uno no sepa o no conozca la estrategia general para ganar siempre. Por eso, lo/a invito a que disfrute del trayecto.

Lo que sigue requiere del uso de la matemática en su más pura expresión. En principio, porque hay que pensar todo el tiempo. ¿Qué pasa? Dije pensar. ¿No le resulta muy atractivo que alguien le proponga pensar para resolver un problema?

¿Se acuerda de las potencias de 2? Es decir, de los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1.024, etc. Estos números provienen de multiplicar varias veces el número 2 (con la excepción del “1”, que proviene de hacer  $2^0$ ). O sea,

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \\ 2 &= 2^1 \\ 4 &= 2^2 \\ 8 &= 2^3 \\ 16 &= 2^4 \\ 32 &= 2^5 \\ 64 &= 2^6 \\ 128 &= 2^7 \\ 256 &= 2^8 \\ 512 &= 2^9 \\ 1.024 &= 2^{10}, \dots \text{ y así siguiendo.} \end{aligned}$$

Ahora le propongo repensar algo. Tome un número cualquiera, digamos el 27 por poner un ejemplo (pero usted elija uno por su cuenta). Trate de escribir el número que eligió (yo lo voy a hacer con el 27) como suma de los números que figuran en la lista anterior.

El número 27 se escribe así:

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1$$

Si hubiera elegido el 151, entonces sería

$$151 = 128 + 16 + 4 + 2 + 1$$

Es decir, cualquier número natural que uno elija se puede escribir de una única forma, como suma de potencias de 2. Si usted leyó el primer volumen de *Matemática... ¿Estás ahí?*, recordará que en la explicación de las *cartas binarias* se usa el mismo argumento que acá: saber que uno puede escribir cualquier número natural de una *única forma* como *suma* de potencias de 2.

Ahora, volvemos al juego. Tome la primera fila y fíjese cuántas monedas hay. Agrúpelas (sin sacarlas del lugar) en potencias de 2.<sup>29</sup> Y luego, repita el procedimiento con las siguientes filas. Veamos algunos ejemplos.

#### EJEMPLO 1

Supongamos que uno tiene esta distribución de monedas por fila:

25  
15  
9  
7  
5  
3  
2  
1

<sup>29</sup> Agruparlas en potencias de 2 significa que se fije primero cuál es la *mayor* potencia de 2 que *cabe*. Es decir, si en la fila hay 25 monedas, por ejemplo, entonces la *mayor* potencia de 2 que *entra* es 16. Luego, de las monedas que quedan (en este caso 9), la *mayor potencia de 2 que entra es 8*. Y luego, como queda 1, se terminó la distribución.

Ahora “escribimos” cada uno de estos números como suma de potencias de 2, y resulta lo siguiente:

25	16	8				1
15		8	4	2		1
9		8				1
7			4	2		1
5			4			1
3				2		1
2				2		
1						1

Es decir, lo que hice fue agrupar en cada fila todas las monedas que había, pero las separé de acuerdo con las potencias de 2. Un dato complementario (pero muy importante) es que esta manera de agruparlas es única. Es decir, cada número puede escribirse de una única manera como suma de potencias de 2 (y esto da lugar a lo que se llama la escritura binaria, que es la que usan las computadoras).

EJEMPLO 2:

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
25		16	8			1
19		16			2	1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1

EJEMPLO 3:

24	16	8				
16	16					
14		8	4	2		
7			4	2	1	
1						1

Creo que con estos tres ejemplos se entiende lo que uno hace con las monedas de cada fila. Ahora, voy a explorar cada uno de ellos. Voy a contar cuántos números aparecen en cada columna (una vez agrupados en potencias de 2).

En el ejemplo 1, en la primera columna hay un número 16, en la segunda columna aparecen tres números 8. En la tercera hay tres números 4. En la cuarta, cuatro números 2, y por último, en la columna final, hay siete números 1. O sea, si escribo lo que acabo de encontrar (y agrego una fila al final), se tiene:

25	16	8				1
15		8	4	2		1
9		8				1
7			4	2		1
5			4			1
3				2		1
2				2		
1						1
<hr/>						
	1	3	3	4	7	(***)

Para confirmar las ideas que expuse recién, hago lo mismo con los dos ejemplos que faltan: 2 y 3.

EJEMPLO 2:

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
25		16	8			1
19		16			2	1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1
<hr/>						
	2	3	3	3	5	6 (***)

## EJEMPLO 3:

24	16	8				
16	16					
14		8	4	2		
7			4	2	1	
1					1	
	2	2	2	2	2	(***)

Ahora voy a usar un par de nombres. Se dice que una posición del juego cualquiera está *balanceada* si todos los números que figuran en la última fila (la que agregué en (\*\*\*)) son pares. De lo contrario, se llama *desbalanceada*. Como se ve, el ejemplo 1 provee una posición desbalanceada (ya que aparecen varios números impares en la última fila).

El ejemplo 2, provee también

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
25		16	8			1
19		16			2	1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1					1	
	2	3	3	3	5	6 (***)

una posición desbalanceada.

En cambio, en el ejemplo 3,

24	16	8				
16	16					
14		8	4	2		
7			4	2	1	
1					1	
	2	2	2	2	2	(***)

las columnas están todas balanceadas, porque la última fila consiste de todos números pares.

Ahora viene la parte interesante (y lo invito a que reflexione sobre lo que va a leer): si una posición está desbalanceada, entonces siempre se puede *balancear* reduciendo las monedas de una sola fila. Esto es muy importante, porque dice que si cualquiera de los dos jugadores tropieza con una posición desbalanceada, la puede balancear con un movimiento lícito.

Inicialmente, lo voy a hacer con un ejemplo de manera tal de poder aclarar las ideas. Espero que esté de acuerdo conmigo.

Supongamos que uno tiene esta distribución de monedas:

121, 83, 57, 46, 29, 17, 12, 6 y 3

Las agrupo de acuerdo con las potencias de 2 y me fijo al final si está balanceada o no.

121	64	32	16	8			1
83	64		16			2	1
57		32	16	8			1
46		32		8	4	2	
29			16	8	4		1
17			16				1
12				8	4		
6					4	2	
3						2	1
	2	3	5	5	4	4	6 (***)

Uno descubre que está desbalanceada (¿entiende por qué?). Es que en la última fila (\*\*\*) aparecen varios números impares. Para balancearla, debe fijarse en la fila (\*\*\*) cuál es la potencia de 2 más grande que aparece con un número impar. O sea, qué número de la fila (\*\*\*) es impar y el que está *más* a la izquierda de todo el resto. En el ejemplo, resulta ser el 32, ya que figura tres veces.

Uno elige una fila cualquiera que contenga al número 32, digamos la cuarta fila (que sirvió para desarrollar el número 46).

Ahora voy a hacer de cuenta que esa fila, la del 46, no existe: la ignoro. Es como si empezara todo de nuevo, incluso escribiendo la nueva fila (\*\*), ignorando el número 46.

La última fila, (\*\*), puede que cambie en la paridad de algunos números. O sea, algunos de los que estaban pares podrán pasar a ser impares, o al revés, o quedar como estaban, pero lo seguro es que todos los potenciales cambios tienen que producirse a la derecha del 32, porque las potencias de 2 que figuran a la izquierda de 32 no las toco. (Eso sucede porque elegí el 32 como la más grande de todas las que aparecían un número impar de veces.)

Por eso, al excluir la fila del 46, entonces se ve que quedan siendo impares:

- La del 16 (aparece cinco veces).
- No la del 8, porque al excluir el 46 nos “llevamos” un 8, por lo que ahora quedan sólo cuatro.
- Queda impar la del 4 (aparecen tres números 4 al obviar el 46).
- También la del 2, por la misma razón.
- Y por último, queda un número par (seis en total) en la fila del 1.

¿Cómo hacer para balancear lo que está desbalanceado? Lo que hay que hacer es sumar:

$$16 + 4 + 2$$

(porque son las tres potencias de 2 que quedaron impares). Y esta suma resulta ser

$$22$$

Entonces, reemplazamos la fila del 46, por una de 22 (o sea, si uno está jugando el juego, tiene que restar 16), y se tiene:

121	64	32	16	8			1
83	64		16			2	1
57		32	16	8			1
<b>22</b>			<b>16</b>		<b>4</b>	<b>2</b>	
29			16	8	4		1
17			16				1
12				8	4		
6					4	2	
3						2	1
	2	2	6	4	4	4	6

Habiendo hecho esto, hemos logrado balancear la posición.

En resumen, para balancear una posición desbalanceada lo que hay que hacer es lo siguiente:

- a) Fíjese cuál es la mayor potencia de 2 que está desbalanceada. Elija esa fila (si hay varias, puede elegir una cualquiera).
- b) Ignore esa fila (o ese número si prefiere), y fíjese cómo queda la posición ahora. Es decir, como si ese número no hubiera existido. Uno mira cuáles son las potencias de 2 que quedan desbalanceadas habiendo excluido esa fila.
- c) Luego reemplace la fila que estaba ignorando por la suma de las potencias de 2 que quedaron desbalanceadas. Con eso, uno se asegura de que todas las potencias de 2 quedan balanceadas y, por lo tanto, la posición final es balanceada.

Esto acaba de demostrar que toda posición desbalanceada se puede balancear con sólo modificar una fila, lo que significa que uno lo puede lograr haciendo un movimiento lícito.

En el ejemplo 2:

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
25		16	8			1
19		16			2	1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1
	2	3	3	3	5	6 (***)

Me fijo en la mayor potencia de 2 de la fila (\*\*\*) que es impar. En este caso, resulta ser la columna del 16, ya que hay tres números 16. Elijo una fila cualquiera que contenga al 16. Por ejemplo, la del 19. Me fijo en lo que queda, excluyendo la fila del 19.

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
27		16	8			1
<del>19</del>		<del>16</del>			<del>2</del>	<del>1</del>
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1
	2	2	3	3	4	5 (***)

Ahora, las potencias de 2 que resultan impares son la del 8, la del 4 y la del 1.

Los sumo y queda:

$$8 + 4 + 1 = 13$$

Lo que tengo que hacer ahora es reemplazar la fila del 19 (que estaba ignorando hasta ahora) y poner 13. Es decir, en la práctica, si estuviera jugando al Nim con alguna otra persona, tengo que retirar cuatro monedas de la fila del 19. En ese caso, se tiene la siguiente situación:

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
27		16	8			1
13			8	4		1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1
	2	2	4	4	4	6 (***)

Luego, la fila (\*\*\*) quedó con todos números pares y, por lo tanto, hemos balanceado la posición. Esto significa que uno, haciendo movimientos lícitos, balancea cualquier posición desbalanceada.

Ahora, al revés. ¿Qué sucede si una posición ya está balanceada? Entonces, lo que quiero hacer es convencerla/o de que cualquier cosa que haga la va a desbalancear.

Esto hay que interpretarlo así: si la posición es balanceada, significa que todas las potencias de 2 que aparecen en todas las filas son necesarias, para que al final en la fila (\*\*\*) queden todos números pares. Al quitar cualquier moneda, uno desbalancea la posición.

Justamente, si uno empieza con una fila cualquiera, al tocar cualquier moneda, hace desaparecer una (o más) potencias de 2, que eran necesarias para mantener la posición balanceada. Podrían incluso aparecer otras potencias de 2, pero también desbalancearían la posición, porque todo lo que hay en el resto no se modifica.

Es decir, al alterar cualquier fila, inexorablemente se desbalancea la posición. Antes de seguir avanzando, convéznase que entendió esta última idea. La repito: si una posición está *balanceada*, cualquier moneda que uno quite de cualquier fila, la desbalancea.

Ahora sí, la estrategia ganadora. Lo importante de lo que aprendimos recién es que, si uno encuentra una posición desbalanceada, la puede balancear con movimientos legales. A su vez, si a uno le toca jugar con una posición que ya está balanceada, no puede evitar desbalancearla.



Teniendo esto en cuenta, cuando el juego se termine, o sea, cuando uno de los competidores se quede con la última moneda (o las últimas, si es que quedaron más en una sola fila), esa posición (cuando ya no quedan monedas) estará balanceada. En consecuencia, el último jugador encontró en el último tramo una posición desbalanceada... y la balanceó (para terminar ganando).

Es decir que, jugando como expliqué más arriba, un jugador balancea y al siguiente jugador no le queda más remedio que desbalancear. Lamentablemente, el jugador que desbalancea cada vez que juega, va a perder (por supuesto, si los dos saben jugar al Nim). Por eso, si uno quiere ganar siempre, tienen que pasar las siguientes cosas:

- a) Si la posición inicial está desbalanceada, el que empieza, gana.
- b) Si la posición inicial está balanceada, el que empieza, pierde.

Por supuesto, todo esto requiere de que ambos jugadores sepan usar esta estrategia. Si no, si uno juega libremente, sin estar sujeto a ninguna elaboración, puede o bien ganar o bien perder independientemente de que las posiciones estén balanceadas o no.

MORALEJA: uno puede jugar al Nim, y hacerlo *muy bien* sin necesidad de saber *nada* de lo que está expuesto más arriba.

Sin embargo, la idea de cómo hacer para ganar *siempre* es algo que se conoce hace muchos años y aparece profusamente en la literatura que habla del Nim.

Como habrá detectado ya, es una estrategia *no trivial*, y es muy poco probable que a uno se le ocurra.

Por eso, lo invito a que no se desespere si al leer este segmento pensó que ni siquiera los juegos son para usted. No. Los juegos son para *todos*, para entrenar la mente y para pensar. Y quién sabe, si se dedicara muchas horas a pensar en el Nim, tal vez se le hubiera ocurrido cómo hacer para ganar.

## Reflexiones y curiosidades matemáticas

### Los matemáticos y las vacas

En el primer tomo de esta serie mencioné alguna manera de describir a un matemático. Aquí les propongo otra.

En un tren viajaban tres personas: un economista, un lógico y un matemático.

Recién habían cruzado la frontera que separa a, digamos, Francia y España. En ese momento, desde una de las ventanas del tren, ven una vaca marrón. La vaca está comiendo pasto en forma paralela al tren. El economista dice: “Miren... las vacas en España son marrones”. El lógico replica: “No. Las vacas en España tienen al menos un lado que es marrón”. El matemático interviene confiado y dice con autoridad: “No. Hay al menos una vaca en España, uno de cuyos lados parece ser marrón”.

Más allá de que esto parezca una broma, tiene un ángulo interesante para analizar. En rigor, en función de los datos que ellos tenían, de las tres conclusiones que sacaron, la única que se puede sostener es la del matemático. Las otras dos parecen ciertas también, claro, pero se apoyan en que nosotros sabemos algunas cosas más sobre las vacas, y esa información la querríamos usar si estuviéramos en el tren.

Por eso, la anécdota, que parece trivial y divertida, tiene un costado que invita a pensar. Espero que usted lo haya hecho conmigo.

Niñas en la playa<sup>30</sup>

Aquí se trata de otra manera de ilustrar cómo funciona nuestro cerebro. La flexibilidad y plasticidad que tenemos (y que no sé si usamos apropiadamente) es en verdad asombrosa.

Lea el texto que sigue. Al principio le va a resultar incomprensible. Cuando termine de leerlo (seguro que más de una vez) casi seguro se habrá sorprendido, más que nada porque en el camino uno descubre que tiene capacidades que no conocía. Acompáñeme.

C13R70 D14 D3 V3R4N0 35748B4 3N L4 PL4Y4  
0853RV4ND0 D05 CH1C45 8R1NC4ND0 3N L4 4R3N4,  
357484N 7R484J4ND0 MUCHO, C0N57RUY3ND0 UN  
C4571LL0 D3 4R3N4 C0N 70RR35, P454D1Z05 0CUL705 Y  
PU3N735. CU4ND0 357484N 4C484ND0 V1N0 UN4 OL4  
9U3 D357RUY0 70D0 R3DUC13ND0 3L C4571LL0 4 UN  
MON70N D3 4R3N4 Y 35PUM4. P3N53 9U3 D35PU35 DE  
74N70 35FU3RZ0 L45 CH1C45 C0M3NZ4R14N 4 L10R4R,  
P3R0 3N VEZ D3 350, CORR13R0N P0R L4 P14YR R13ND0  
Y JU64ND0 Y COM3NZ4R0N 4 C0N574U14 0740  
C4571LL0.

C0MPR3ND1 9U3 H4814 4PR3ND1D0 UN4 6R4N L3CC10N;  
64574M05 MUCHO 713MP0 D3 NU357R4 V1D4  
C0N57RUY3ND0 4L6UN4 C054 P3R0 CU4ND0 M45 74RD3  
UN4 OL4 LL364 4 D357RU14 70D0, S0L0 P3RM4N3C3 L4  
4M1574D, 3L 4M0R Y 3L C4R1Ñ0, Y L45 M4N05 D3  
49U3LL05 9U3 50N C4P4C35 D3 H4C3RN05 50NR31R.

S4LUD05 Y 83505

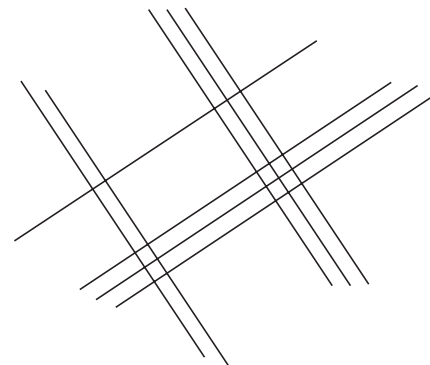
<sup>30</sup> Este texto me llegó por dos vías diferentes. Una, por parte de Patricia Batistoni, licenciada en Ciencias Biológicas y periodista científica, y por otro lado, me lo acercó también Alicia Dickenstein, doctora en Matemática y amiga.

## Una manera gráfica de multiplicar

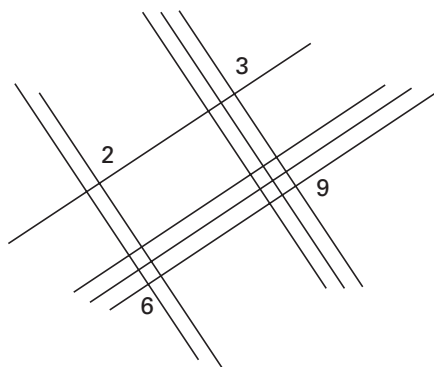
De la misma forma en que mostré cómo se podía multiplicar y dividir sin saber las tablas en el Episodio 2 de esta serie, quiero ahora proponer *otra forma*, aún más gráfica. La idea y el crédito de lo que sigue le corresponden *completamente* a Hugo Scolnik, doctor en Matemática, especialista en computación y criptografía. Acá va.

Supongamos que uno quiere multiplicar  $13 \times 23$ . Entonces, mira el primer número (o sea, el 13) y, como empieza con 1, dibuja una recta de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Luego, como el número 13 sigue con un tres (como segundo dígito), dibuja tres líneas paralelas a la que había dibujado antes, otra vez, de izquierda a derecha, y de abajo hacia arriba. Ahora que ya terminamos con el primer factor (13), vamos al otro (23).

Tomemos el primer dígito de este número, el número 2, y tracemos dos líneas perpendiculares a las que había antes. Por último, como el segundo dígito de este número es un 3, dibujamos tres líneas separadas de las anteriores, pero también perpendiculares a las que teníamos antes. En definitiva, queda una figura así:



Ahora, contamos las intersecciones que se produjeron entre todas las rectas.



Y anotamos así: a la izquierda de todo, ponemos un número 2. Luego, *sumamos* los dos números que quedan verticales, el 3 y el 6. Se tiene un número 9 (que también anotamos, y será el número del medio). Y por último, tenemos al número 9, sólo que queda sobre la derecha (y éste también lo anotamos. Será el número de la derecha).

En consecuencia, queda anotado el número 299. Haga la cuenta: multiplique  $13 \times 23$  y verá que se obtiene 299.

Otro ejemplo. Supongamos que uno quiere multiplicar  $213 \times 321$ . Voy a hacer la misma construcción de hace un momento, pero en lugar de usar números de dos dígitos, lo voy a hacer con números de tres. El procedimiento es el mismo, sólo que ahora, como cuando uno suma normalmente y el resultado excede a diez y “me llevo 1” o “me llevo 2”, o lo que sea, habrá que aplicarlo en este caso también. Como antes, como el primer número para multiplicar es el 213, hay que construir tres conjuntos de líneas paralelas: primero dos líneas (ya que el primer dígito es un 2), luego una línea separada, paralela a la anterior (ya que el segundo dígito de 213 es un 1) y luego tres líneas separadas de las anteriores, pero paralelas a ellas.

Una vez hecho esto, tomamos el otro número que aparece en el producto, el número 321, y hacemos lo mismo. Construimos líneas paralelas entre sí, de acuerdo con los dígitos, pero perpendiculares a

las que habíamos trazado antes, como se ve en la figura 1. Primero trazamos tres, luego dos, y al final una.

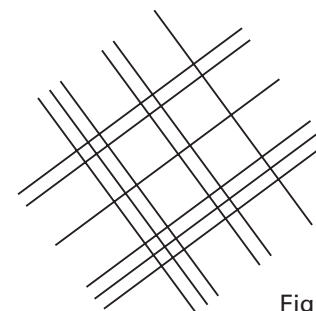


Figura 1

Ahora, contamos las intersecciones que quedan alineadas verticalmente, como se ve en la figura 2. Todo lo que resta hacer es sumar las intersecciones, y contar en forma encolumnada.

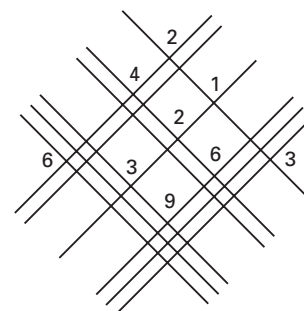


Figura 2

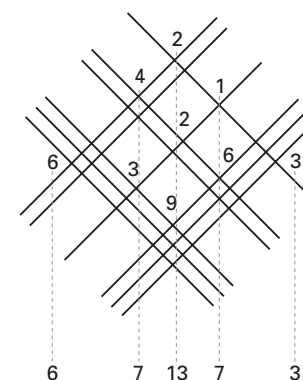


Figura 3

Y en este caso se tienen (véase la figura 3):

$$6, (3 + 4), (9 + 2 + 2), (6 + 1) \text{ y } 3$$

O lo que es lo mismo:

$$6, 7, 13, 7 \text{ y } 3$$

Pero el 13 le aporta una unidad más al número que está a la izquierda y, por lo tanto, se obtiene:

$$6, 8, 3, 7, 3$$

Lo invito a que haga la multiplicación correspondiente ( $213 \times 321 = 68.373$ , como queríamos verificar.

Una vez visto el método, la pregunta que hay que contestar es: ¿por qué funciona? En realidad, este sistema (que usted puede aplicar a cualquier multiplicación) funciona porque uno usa sutilmente la propiedad *distributiva* de la multiplicación con respecto a la suma.

La propiedad *distributiva* dice que, si uno tiene –por ejemplo– cuatro números  $a, b, c$  y  $d$ , entonces:

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a \cdot c) + (a \cdot d) + (b \cdot c) + (b \cdot d)$$

Rápido, un ejemplo:

Supongamos que uno quiere multiplicar

$$(7 + 8) \cdot (11 + 5), \text{ o sea, } 15 \cdot 16$$

El resultado de hacer esto es: 240.

Ahora bien: en lugar de proceder así, uno puede *distribuir* los factores y, por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} (7 + 8) \cdot (11 + 5) &= (7 \cdot 11) + (7 \cdot 5) + (8 \cdot 11) + (8 \cdot 5) \\ &= 77 + 35 + 88 + 40 \\ &= 240 \end{aligned}$$

Esta propiedad vale para cualquiera de ellos, ya sean  $a, b, c$  y  $d$  reales o no.

Con todo, quiero mostrar cómo se usa la propiedad distributiva para explicar por qué funciona el método para multiplicar en los dos ejemplos que figuran más arriba.

PRIMER CASO:  $13 \cdot 23$

Escribimos *el desarrollo decimal* de ambos números.

O sea:

$$\begin{aligned} 13 &= (1 \cdot 10) + 3 \\ 23 &= (2 \cdot 10) + 3 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (13 \cdot 23) &= (10 + 3) \cdot (20 + 3) \\ &= (200 + [(3 \cdot 20) + (10 \cdot 3)] + (3 \cdot 3)) \\ &= 200 + (60 + 30) + 9 \\ &= 200 + 90 + 9 \\ &= 299 \end{aligned}$$

y eso es lo que queríamos comprobar.

SEGUNDO CASO:  $213 \cdot 321$

Si uno hace la multiplicación *convencional*, obtiene:

$$\begin{array}{r} 213 \\ \times 321 \\ \hline 213 \\ 426 \\ 639 \\ \hline \end{array}$$

Luego, uno suma columna por columna y tiene los siguientes resultados:

$$6, (4 + 3), (2 + 2 + 9), (1 + 6), 3$$

O sea,

$$6, 7, (13), 7, 3$$

Pero, como no se puede poner el número 13, uno “se lleva uno” prestado para el valor de la izquierda y, por lo tanto, termina la cuenta escribiendo:

$$6, (7 + 1), 3, 7, 3$$

O lo que es lo mismo:

$$6, 8, 3, 7 \text{ y } 3$$

Si pongo todo junto se tiene: 68.373.

Y ése es el resultado que buscaba. Es decir que, revisando la forma en que uno multiplica habitualmente, se encuentra con los *mismos números* que tiene más arriba.

MORALEJA: el método que se plantea no aporta nada nuevo, sino que es una manera gráfica de entender qué es lo que uno está haciendo cuando multiplica en la vida cotidiana. Obviamente, no propongo que nadie multiplique de esta forma, pero sí sirve para comprender cuál es el uso que se le da a la propiedad distributiva en el momento en que hacemos una multiplicación cualquiera.

## Sophie Germain

La historia que sigue es real. Una adolescente quería leer algo que sus padres consideraban inconveniente. La chica insistía. Los padres,

también. Como no tenían luz eléctrica, le escondían las velas para que no pudiera leer mientras ellos dormían. Pero no podían (ni querían) sacar tantos libros de la biblioteca. Y como además hacía mucho frío... *mucho mucho frío*, no encendían el hogar precario que tenían para que a la niña se le hiciera imposible tolerarlo. Más aún: a propósito, dejaban una ventana abierta. Pensaban que sería suficiente para espantarla. Sin embargo, Sophie (el nombre de la joven) tenía otras ideas, y se las arreglaba a su manera: se envolvía en cortinas y frazadas para protegerse de las temperaturas gélidas, y además, como iba robando y conservando trocitos de vela, los encendía y lograba iluminar, aunque fuera tenuemente, los textos que quería leer.

Lo convencional sería pensar que Sophie quería leer algo de pornografía. Pero claro, en ese caso, ¿qué hacían tantos libros *pornográficos* en una biblioteca con padres que decidían exhibirlos en lugar de esconderlos o tirarlos? No. Era otra cosa. Sophie quería estudiar matemática, y sus padres se oponían: “Eso no es para mujeres”.

Sophie Germain era la segunda de tres hijas de una familia de clase media establecida en París. Nacida en abril de 1776, su padre era un comerciante dedicado a la seda, que luego se convirtió en el director del Banco de Francia. Sin embargo, sus padres no querían que Sophie leyera esos libros ni estudiara esos textos. Lo curioso era que el padre los tuviera en su propia biblioteca (por lo que intuyo que los debería valorar), pero no quería que *contaminaran* a su propia hija. Los biógrafos de Sophie aseguran que la niña había quedado impactada al leer la historia de Arquímedes cuando, al producirse la invasión romana a Siracusa, fue interrogado por un soldado. Supuestamente, Arquímedes estaba tan ensimismado y concentrado en la geometría que tenía delante que ignoró a su interlocutor. Resultado: el soldado le clavó su lanza y lo mató.

Sophie decidió que debía valer la pena averiguar qué tenía la matemática si había sido capaz de poder atrapar de tal forma a una persona, al punto de hacerla ignorar una amenaza de ese calibre. Y ahí empezó una parte de su calvario. Sophie leía a escondidas hasta que al final, viéndola enferma y cansada durante el día, sus padres decidieron contemporar. En ese momento, tenía catorce años.

Igual, no sería fácil. En 1794, ya con dieciocho años, se produjo en París la fundación de la École Polytechnique (Escuela Politécnica), una de las instituciones más famosas del mundo. Se creó con la intención de “entrenar a los matemáticos e investigadores para que no se fueran del país” (igual que en la Argentina...). Pero *las mujeres no estaban autorizadas a ingresar: era un lugar sólo para hombres*.

Sophie ya había dado muestras de no saber aceptar un “no” muy fácilmente. Siguió estudiando en forma individual, pero necesitaba someter sus investigaciones ante matemáticos que entendieran lo que hacía. ¿Cómo hacer? Sophie encontró una manera. Comenzó a usar un seudónimo: monsieur Antoine-August LeBlanc, quien había sido ex alumno de Lagrange. ¡Sophie Germain necesitó hacerse pasar por *hombre* para lograr la aceptación de sus investigaciones! El verdadero Le Blanc había abandonado París y Sophie aprovechó para robarle la identidad y esconder su género. Así, le enviaba por correo sus escritos a Lagrange, quien, luego de varios años, decidió entrevistarse con el joven que daba respuestas tan brillantes. Para su estupor, LeBlanc *iera una mujer!* y nada tenía que ver con su ex alumno.

Superado el impacto inicial, el matemático francés “la adoptó” y su apoyo le permitió a Sophie entrar en un círculo un poco más privilegiado de matemáticos y científicos. Su área de investigación es lo que se conoce con el nombre de Teoría de números. El más destacado de todos era uno de los mejores matemáticos de la historia, el alemán Carl Friedrich Gauss. Sophie volvió a usar el seudónimo con él, por temor a que Gauss no quisiera leer sus trabajos. Eso fue en 1804. En 1807, Gauss conoció la verdad y no sólo no se enojó, sino que hasta le pareció simpático lo que había ideado Sophie.

Sin embargo, no la adoptó como alumna, ya que por esa época decidió abandonar la Teoría de números y se dedicó a la astronomía en la Universidad de Gotingen. Sophie siguió avanzando como pudo y logró trascender más allá de París, en especial en el círculo privilegiado de los matemáticos (todos hombres) de Europa. Produjo un trabajo que sería reconocido como una gran contribución para la época, tratando de resolver un problema que tendría ocupados a los matemáticos durante casi cuatrocientos años: el último teorema de Fermat.

Igualmente, Sophie también abandonó la Teoría de números y se dedicó a la física, muy en particular a estudiar la vibración de superficies elásticas. Sus trabajos, algunos considerados geniales, sufrían sistemáticamente los reproches del *stablishment* porque no tenían el pulido de aquel que había recorrido los claustros en forma sistemática. *Sin embargo, sus ideas podían más*. Sophie Germain terminó publicando su famoso *paper Memoir on the Vibrations of Elastic Plates* (Memoria sobre la vibración de láminas elásticas), considerado aún hoy un paso esencial en ese campo.

Era tal la discriminación con las mujeres que se querían dedicar a la ciencia que un italiano, Francesco Algarotti, escribió un texto especial que tituló: *La filosofía de sir Isaac Newton explicada para el uso de la mujer*. Es difícil imaginar un agravio mayor. Sus trabajos terminaron catapultando a Germain, y le permitieron entrar en lugares sólo reservados a los hombres. De hecho, se convirtió en la primera mujer que, no siendo la esposa de un miembro, fue invitada a participar en las sesiones de la Academia de Ciencias. El Instituto de Francia también la “galardonó” en el mismo sentido cuando, superando su condición de mujer, la distinguió con un lugar en la mesa de debates, algo que no había hecho nunca antes.

Sophie murió prematuramente, a los cincuenta y cinco años, el 27 de junio de 1831. Falleció de un cáncer de pecho que virtualmente la confinó a una pieza durante la última parte de su tortuosa vida. Luchó contra todos los prejuicios sociales imaginables y aun contra los prejuicios que le impedían acceder al conocimiento, nada menos, por el simple hecho de ser mujer.

Ahora se sostiene que Sophie Germain fue, posiblemente, la mujer más profundamente intelectual que Francia haya producido. Sin embargo, como apunta Simon Singh en su libro sobre la historia del último teorema de Fermat, cuando Sophie falleció, el funcionario estatal que fue a hacer el certificado de defunción la clasificó como una *rentière-annuitant* (mujer soltera sin profesión) y no como matemática... Todo un símbolo de la época.

Su memoria fue honrada de diferentes maneras, claro que mucho después de fallecida. Gauss había logrado convencer a la Universi-

dad de Gottengen para que le dieran un título honorario. Cuando la junta de gobierno decidió aceptar la propuesta, fue demasiado tarde. Sophie no vivía ya para ir a retirarlo.

La calle Sophie Germain en París es otro ejemplo, y una estatua se erigió en la entrada de la École Sophie Germain, también en París. La casa en la que murió, ubicada en el 13 rue de Savoie, fue designada por el gobierno francés como monumento histórico.

Afortunadamente, hoy la historia es distinta. No *muy distinta*, pero distinta. No es fácil ser mujer en el mundo de la ciencia. De ello pueden dar prueba varias generaciones de mujeres en el mundo, y muy en particular en la Argentina. La mujer siempre tuvo una tarea doble: investigar (que de por sí ya conlleva una vida sacrificada y plena de frustraciones) y, también, atender a todo lo que a su alrededor sirve para depreciar su capacidad intelectual, sea hecho en forma consciente o inconscientemente. Además, la mujer pelea contra un sistema y una sociedad que, lo reconozcan o no, son machistas por excelencia.

## Estimar y errar

Si a usted lo/la paran por la calle y le preguntan la hora, ¿cómo responde? ¿Dice “las 3 y 37” o “las 8 y 14”? En principio, no. Uno está acostumbrado a “redondear”, y le presenta a la persona que le preguntó una respuesta aproximada. Es posible que responda las “4 menos 20” (o las 3 y 40) o “las 8 y cuarto” o “las 8 y 15”. Es decir, uno ofrece aproximaciones que, en definitiva, son las que nos sirven para la vida cotidiana.

Si uno tiene que multiplicar 180 por 320, puede (por supuesto) hacer la cuenta. Pero también puede (y debe, en la mayoría de las ocasiones) calcular 200 por 300 (o sea, 60.000) porque eso da una idea aproximada de lo que se busca (en definitiva,  $180 \times 320 = 57.600$ , por lo que uno erra en menos de un 5%). Creo que en la mayoría de las aplicaciones diarias podemos convivir con un error de ese tipo.

Salvo en circunstancias muy particulares, en las que el grado de precisión importa significativamente (por ejemplo, en una operación de un tumor cerebral, uno no querría que el cirujano le errara en

nada), decía, salvo en esas ocasiones, sustituir la respuesta exacta por una aproximación es más que suficiente. Se trata entonces de aprender a aproximar, aprender a estimar.

Un último detalle: en general, cuando uno realiza una estimación de cualquier tipo, es obvio que lo más probable es que le erre al resultado *exacto*. Justamente, uno habla de error. Sin embargo, la palabra *error* lleva a sospechar que uno ha cometido una equivocación, cuando en realidad *no es así*. Intentar *disminuir* ese potencial error más allá de las necesidades del momento *es* una equivocación que solemos cometer. ¿Cuándo necesita uno decir “son las 4 y 13 con 23 segundos”? Tener un reloj, por ejemplo, con ese grado de precisión involucra un costo en dinero y en tiempo que –en general– no se justifica.

En todo caso, de lo que deberíamos hablar es de *incerteza* en la respuesta, o *imprecisión*, pero no de error. Y si alguien quiere ser muy preciso, lo que puede hacer es *señalar* el margen de error con el que entrega la respuesta que se le pide, o sea, en cuánto le erra. Ese dato, en general, es mucho más que suficiente.

Como dice Mitchell N. Charity, profesor en el MIT, cuando a uno le preguntan cuál es el volumen de una pelota o una esfera, uno contesta que es “ $(4/3) \times (\pi) \times (\text{radio})^3$ ”, cuando, en realidad, bastaría con decir que es la mitad del volumen de la caja en la que venía metida (si la pelota entra *justo en la caja*), o sea “ $(1/2) (\text{diámetro})^3$ ” (el “diámetro elevado al cubo”), lo cual erra el resultado final en menos de un 5%. ¿No valdrá la pena dedicarle un rato más a estimar que a calcular con precisión?

Y aunque no lo parezca en la superficie, esto es hacer matemática también.

## El perro llamado Fido y la paradoja de Bertrand Russell

Lo que sigue es un extraordinario ejercicio de lógica. Créame que vale la pena sentarse un rato y pensar la situación que voy a plantear. La idea es muy conocida para cualquiera que trabaja en *lógica*

*matemática*, pero de todas las variantes que conozco, la que sigue es una de las que más me gustó y le pertenece a Donald Benson.

Supongamos que en algún planeta –digamos Plutón, por ponerle un nombre (aunque desde 2006 ya no es más un planeta)– hay *infinitos* perros. Sí, ya sé. De entrada hay un problema, porque no es posible que haya *infinitos perros*, pero se trata de estirar un poco la imaginación y avanzar. Concédame ese beneficio.

Sigo. Los infinitos perros tienen uno de estos dos colores: algunos son *blancos* y otros son *negros*. Eso sí: en este planeta las *leyes son muy rígidas*, especialmente cuando se trata de que un perro pueda *olfatear* a otro. Más aún: cada perro tiene una *lista de perros a los que puede olfatear*. Sólo les está permitido, entonces, olfatear a cualquier perro que figure en su lista. La pena para los que no cumplen es la muerte instantánea.

Sigo con más datos. Otra cosa que también se sabe es que *no hay dos listas iguales*. Es decir, no hay ningún perro que tenga una lista igual a la de otro.

Pero, increíblemente, si usted seleccionara *cualquier conjunto de perros de Plutón*, ese grupo corresponderá exactamente a la lista de algún perro. Lo invito a pensar en este último punto. Es más: le pido que no avance si no se siente seguro de haber entendido lo que dice esta ley. Por ejemplo, si usted elige tres perros cualesquiera en Plutón, esos tres tienen que corresponder a la lista de un *único* perro. Y lo mismo, si elige otros *seis perros*: esos seis tienen que ser exactamente los seis que figuran en la lista de un *único* perro. Eso sucederá con *cualquier subconjunto de perros* de Plutón que usted elija: ellos tendrán que ser los integrantes de la lista de un *único* perro.

Además, lo curioso es que se permite que algunos perros figuren en sus propias listas. Es decir que sólo a esos perros se les permite olfatearse a sí mismos. Justamente, éstos son los perros de color negro. El resto de los perros *no figura* en su propia lista. No se les permite que se olfateen a sí mismos y, por supuesto, éstos son los perros blancos.

Ahora bien, la pregunta es la siguiente: ¿es posible que estas reglas se cumplan? Es decir, ¿es posible que esa situación sea posible? ¿O hay alguna contradicción en alguna parte?

A esta altura, lo que yo haría es detenerme a pensar tranquilo, sin apurones. El problema no tiene trampa, no tiene ningún misterio. Es cuestión de que usted recorra la lista de leyes que están escritas más arriba y se fije si hay alguna contradicción. Y por supuesto, si la hay, ser capaz de explicar cuál es. A manera de resumen, escribo todas las reglas:

- 1) Hay infinitos perros en Plutón. Algunos son blancos, otros son negros.
- 2) Todo perro tiene una lista de perros a los que puede olfatear.
- 3) Todas las listas son diferentes.
- 4) Dado cualquier conjunto de perros de Plutón, ellos tienen que ser los integrantes de la lista de un único perro, y por lo tanto, serán los únicos que ese perro pueda olfatear.
- 5) Algunos perros pueden figurar en su propia lista y se les permite olfatearse a sí mismos. Éstos son los perros negros.
- 6) Los perros restantes, o sea aquellos que no figuran en sus propias listas, son los perros blancos.

Ahora le toca a usted. Si no, lea la página de las soluciones (pero, como siempre, ¿qué gracia tendría sin haberlo pensado? ¿No era ésa la idea acaso?)

### Paradoja de Allais

El comportamiento humano (afortunadamente) es impredecible. Puestos frente a situaciones muy similares, nuestras decisiones (la suya, la mía) pueden ser totalmente diferentes de lo que uno esperaría. Más aún: creo que si se nos preguntara el porqué de tales variaciones, tendríamos muchas dificultades para explicar nuestra conducta.

El próximo ejemplo (de acuerdo con la presentación que hicieron Kahneman y Tversky en 1979) es conocido con el nombre de *La paradoja de Allais*.<sup>31</sup> La paradoja exhibe *modelos de conducta* de las per-

<sup>31</sup> Maurice Allais (1911) es economista y doctor en Ingeniería, especializado en Física. Nació en París y, hasta hoy, es el único Premio Nobel en Economía (1988)



sonas. Por supuesto, se trató de encuestas reiteradas que exhibieron la voluntad de distintos grupos, pero al ser repetidas en otros ámbitos y confirmar esas preferencias, créame que sorprende lo que elegimos. Claro, con tanto prolegómeno y anticipación que estoy generando, seguro que cuando usted tenga que optar, ya va a estar *influido* por mi opinión o por lo que escribí hasta aquí.

Supongamos que usted está a punto de jugar a la ruleta, pero en lugar de haber 37 números (estoy incluyendo el cero), hay 100 números, del 1 al 100. Los premios que puede ganar están indicados en las siguientes dos opciones:

#### OPCIÓN A

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobrará 2.500 pesos.

Si sale el número 34, no cobra nada.

Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, cobra 2.400 pesos.

#### OPCIÓN B

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobra 2.400 pesos.

Si sale el número 34, cobra 2.400 pesos.

Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, cobra 2.400 pesos.

Antes de leer lo que hacen (en porcentaje) otros semejantes, usted, ¿qué haría? ¿Optaría por A o por B? ¿Cómo cree que eligen los otros, sus pares?

Repasemos en qué se diferencia una opción de otra. Si sale un número entre el 1 y el 33, la opción A ofrece 100 pesos más que la B. Ambas son iguales del 35 en adelante. Y la diferencia esencial es que, si sale el 34, la opción A no le paga nada, mientras que la B le paga siempre 2.400 pesos.

Ahora, voy a modificar ligeramente las opciones.

---

nacido en Francia. El trabajo que se presenta aquí en forma sucinta y abreviada dio origen a lo que hoy se conoce como “La paradoja de Allais”. Yo elegí una de sus múltiples variantes, que me parece que resume lo que Allais quería mostrar: cómo ligeras variaciones en la oferta generan modificaciones bruscas en las conductas de las personas.

#### OPCIÓN C

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobrará 2.500 pesos.

Si sale el número 34, no cobra nada.

Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, no cobra nada.

#### OPCIÓN D

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobra 2.400 pesos.

Si sale el número 34, cobra 2.400 pesos.

Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, no cobra nada.

Ahora, revise las opciones posibles (C y D) y elija con cuál se quedaría. Luego, lo invito a que confronte lo que hicieron (o harían) –en porcentaje– otras personas.

Una vez más, reflexionemos sobre las diferencias entre ambas opciones. Si sale cualquier número del 35 en adelante, son iguales, porque ninguna de las dos paga nada. La opción C paga 100 pesos más si sale entre el 1 y el 33, mientras que si sale el 34, la opción D paga 2.400 mientras que la C no paga nada.

¿Cuál elegiría usted? O, igual que antes, ¿qué eligió?

### ¿Qué es la inteligencia?

Desde hace muchísimos años ando a la búsqueda de una buena definición de la palabra *inteligencia*. ¿Qué es exactamente? Todo el mundo lo ha pensado, y cuando digo *todo el mundo* es porque seguramente alguna vez hemos hablado con alguien que en algún momento dijo: “Es un tipo muy inteligente” o “Una persona muy inteligente” o bien “Tiene una inteligencia descomunal”. O al revés, “No tiene un gramo de inteligencia”. Pero acá, porque usted ya entiende de qué hablo. Lo que me asombra es que, si uno le pide a alguien que le diga ¿qué es la inteligencia?, lo más probable es que se encuentre con respuestas muy variadas y dispares.

- a) Se trata de la capacidad para resolver problemas.
- b) Se trata de la capacidad para adaptarse rápido a situaciones nuevas.
- c) Es la habilidad para comprender, entender y sacar provecho de la experiencia.
- d) Es la capacidad de un individuo para percibir, interpretar y responder a su entorno.
- e) Se trata de la habilidad *innata* para percibir relaciones e identificar *correlaciones*.
- f) Es la destreza para *encontrar correctamente* similitudes y diferencias, y reconocer cosas que son idénticas.

Obviamente, la lista podría continuar. Habría bastado que le dedicara más tiempo a recorrer Internet o buscar en las enciclopedias que tengo a mano. No importa. No creo que haga falta.

El problema reside en que no hay una definición aceptada *universalmente* sobre lo que significa. Entonces, ¿de qué habla la gente cuando habla de inteligencia? Más allá de mi resistencia y de que me cueste aceptarlo, hay un hilo conductor en lo que cada uno *cree* que dice cuando habla de la inteligencia de una persona. Pero, antes de seguir, cabe preguntarse, sea lo que sea la inteligencia, si uno es *inteligente* para todo (por ejemplo, si una persona *inteligente* para los negocios también lo es para la física), o si para ser inteligente uno tiene que ser *rápido*, o si alcanza con ser profundo. ¿Ser inteligente es tener ideas nuevas? Las personas inteligentes, ¿están preparadas para contestar *todas* las preguntas? ¿Dónde está el punto o la línea en que uno pasa de no inteligente a inteligente?

Históricamente, hay ya planteado un debate sobre lo que significa la inteligencia y, por supuesto, hay varios ángulos posibles para abordar el tema.. Unos sostienen que es una cuestión genética y, por ende, hereditaria. Otros, que depende del ambiente en el que el niño se desarrolla, los estímulos que recibe. Y en el medio, todos los demás. Desde 1930 se discute si la inteligencia es sólo genética o influida directamente por las condiciones del contorno. Pero fue en las décadas del 60 y el 70 cuando se produjo el vuelco más dramático entre

el discurso público y el privado: nadie se atrevía a decir abiertamente lo que los científicos especialistas en el área comentaban en voz baja: la inteligencia –para ellos– tiene un fuerte componente genético y, por lo tanto, hereditario.

En los Estados Unidos, en 1994, se publicó la primera edición del libro *The Bell Curve. Intelligence and Class Structure in American Life* (La Curva de Bell. La inteligencia y la estructura de clases en la vida norteamericana). Se convirtió automáticamente en un best-seller y generó todas las polémicas imaginables. Sus autores, Richard J. Herrnstein y Charles Murray, presumen de haber encontrado una buena definición de inteligencia, formas de cuantificarla y, por lo tanto, de medirla. Aparecen análisis estadísticos (que ellos interpretan como irrefutables desde el punto de vista científico) y un estudio pormenorizado del IQ (*intelligence quotient*, cociente de inteligencia o coeficiente de inteligencia). El IQ se transformó en el método más general para expresar el desempeño intelectual de una persona cuando uno lo compara con el de una población dada.

El libro dividió a la sociedad norteamericana (no necesariamente en partes iguales). Quienes adhieren a las conclusiones de Herrnstein y Murray son vistos como reaccionarios de ultraderecha. Los otros quedan ubicados en el amplio espectro que queda libre.

Lo que resultaría indispensable es analizar lo que se discute desde un punto de vista más desapasionado. Es difícil debatir sobre un tema tan inasible e indefinible con certeza.

Otros científicos están fuertemente en desacuerdo con los tests de inteligencia porque –sostienen– la más importante de las cualidades humanas es demasiado diversa, demasiado compleja, demasiado cambiante y demasiado dependiente del contexto cultural y, sobre todo, demasiado subjetiva para ser medida por respuestas a una mera lista de preguntas. Esos mismos críticos afirman que la inteligencia es más equiparable a la belleza o a la justicia que a la altura o el peso. Así, antes que algo pueda ser medido, necesita ser definido.

Desde otro lugar, Howard Gardner, psicólogo de Harvard, sostiene que “no hay un solo tipo de inteligencia o una inteligencia general, sino siete caracterizaciones bien definidas: lingüística, musical,

lógica-matemática, espacial, corporal y dos formas de inteligencia personal, 'intrapersonal' e 'interpersonal', basadas en la capacidad computacional única de cada persona". Y agrega: "Sé que mis críticos dicen que lo único que hice fue redefinir la palabra 'inteligencia' extendiéndola hasta lugares que para otros ocupa lo que se llama 'talento'. Pero, si algunos quieren denominar al pensamiento lógico y al lenguaje como 'talentos', y aceptan sacarlos del pedestal que ocupan actualmente, no tengo problemas en hablar sobre 'talentos múltiples' que puedan tener las personas".

¿Ambiente o herencia? Los debates ardientes continúan entre los que atribuyen la inteligencia al contexto social de educación y los del otro lado del mostrador, que la ven como genéticamente determinada desde el momento de la concepción. Así puesto, el tema hierve, porque toca las controvertidas cuestiones de educación, clases sociales y relaciones raciales.

Mi posición frente a este debate es que las condiciones del contorno son *esenciales*. Un ejemplo: si el día que yo nací hubieran equivocado al bebé que les llevaron a mis padres, estoy seguro de que el chico que hubiera crecido en mi casa habría tenido altas posibilidades de desarrollar sus habilidades libremente. Claro, no necesariamente hubiera sido matemático ni periodista. Pero lo que me queda claro es que hubiera explotado la habilidad "de fábrica" que tiene cada persona al nacer.

Mi opinión es que *todos* nacemos con alguna destreza, con el gusto por algo en particular, con algún talento o facilidad. Pero si ese niño se desarrolla en un medio ambiente sin posibilidades económicas, o sin estímulos adecuados, es muy probable que nunca llegue a descubrir qué le gusta, ni de qué disfruta. Si les diéramos a todos los niños la posibilidad de vivir en condiciones de desarrollar todo su potencial, entonces después podríamos analizar quién es inteligente y quién no. Aunque ni siquiera nos hayamos puesto de acuerdo en qué quiere decir.

## Paradoja de las papas

El problema que sigue es precioso como muestra (una vez más) de que lo que uno *conjetura* no necesariamente es cierto. Fíjese qué piensa usted.

Supongamos que tiene papas dentro de una bolsa. Las saca, las pesa y anota el resultado: hay 100 kilos. Se sabe que las papas contienen muchísima agua, y en este caso, se sabe que el 99% del peso de las papas es justamente el agua que contienen.

Usted decide dejar las papas al sol, de manera tal que se deshidraten hasta llegar a que el agua que contengan sea el 98% del peso total.

La pregunta es: ¿cuántos kilos de agua se tienen que evaporar para que el agua que quede se corresponda con el 98% del peso? Dicho de otra forma, al pesar las papas por primera vez, el 99% de los 100 kilos es *agua*. ¿Cuánto pesan las mismas papas después de un día de deshidratación, si ahora sólo el 98% del peso es agua?

## Clave pública

Secretos. Todos los tenemos. La vida de cualquier persona involucra en algún momento (me atrevería a decir *a diario*) algún secreto, algo que quiera o tenga que ocultar. Y aunque usted esté tentado a decir "no, yo no tengo nada que ocultar", sin embargo, es muy probable que utilice un *password* si tiene acceso a una computadora, o a recibir correspondencia electrónica, o tiene una tarjeta de crédito, o una máquina de la que saca dinero en efectivo, hasta la combinación de una caja de seguridad o de un candado común y corriente. Y ni qué hablar de hacer alguna transacción por Internet que involucre alguna identificación personal.

¿Cuántas veces le contaron o leyó que hay gente interesada en interceptar datos que usted envía por Internet para usarlos maliciosamente? ¿Cuántas veces dudó en enviar –también por Internet– el número de su documento, o su dirección postal, o el número de su tar-

jeta de crédito o de su cuenta bancaria, por temor a que fueran robados? ¿Cuántas veces pensó que hay gente que puede leer el contenido de sus mensajes de correo electrónico sin que usted lo advierta?

¿Cuántas veces oyó que, para poder garantizar ciertas condiciones mínimas de seguridad, hace falta usar matemática? Ahora bien, ¿qué “matemática” hay que usar? ¿Y cómo? ¿Cuán seguro es? Con lo que sigue, pretendo contarle cómo se hace, qué se usa y cuán seguros son los métodos que se aplican. Por supuesto, sólo será una idea y sin el rigor técnico necesario, pero aspiro a que quien termine de leer el texto cuente con una información que no tenía previamente.

Elegí un camino que quiero compartir con usted, pero necesito pedirle algunas cosas antes:

- Yo voy a hacer algunas cuentas sencillas: multiplicaciones, divisiones y restas. Verifíquelas o créalas, pero advierta que lo que uso son herramientas hipersencillas.
- Hace falta que recuerde lo que es un número primo. Es decir, números que sólo son divisibles por ellos mismos o por el número 1. (El número 1 *no se considera primo*.) Por ejemplo, el 2, 3, 5, 7, 11, 13 son primos. En cambio, 4, 9, 15, 16 no lo son.
- Por último, piense en un número entero positivo cualquiera antes de seguir leyendo (distinto de 0 y de 1). Ese número que está pensando, o bien es primo, o bien es el producto de números primos. Es decir, cualquier número natural es o bien un número primo, o bien se escribe como producto de primos. Por ejemplo, el 11 es primo y listo. El 19 también. Pero el 21 no es primo y se escribe como  $(7 \times 3)$ . El número 100 tampoco es primo, pero se escribe como  $(2 \times 2 \times 5 \times 5)$ .<sup>32</sup>

<sup>32</sup> Este resultado se conoce con el nombre de “Teorema fundamental de la aritmética” y dice que “todo número entero positivo más grande que 1 se escribe como el producto de números primos, que son únicos *salvo el orden*”. Es uno de los teoremas más importantes de la matemática. Es muy sencillo de entender, no muy difícil de probar, pero esencial para sostener toda la estructura de la aritmética clásica.

La clave de por qué funciona este método consiste en un par de razones muy interesantes. En principio, si le doy dos números cualesquiera, 3 y 5 por ejemplo, y le digo que los multiplique, la respuesta es obvia: 15. Al revés: si le doy el número 15, y le pido que me diga cuáles son los factores primos que lo componen (o sea, 3 y 5), también es fácil de calcular, porque los números son pequeños.

En cambio, si le diera el número 358.566.167 y le dijera que encuentre los dos factores que lo componen... intente y verá que la dificultad es muy grande. La respuesta es que:

$$18.859 \cdot 19.013 = 358.566.167$$

Y si le dijera que encuentre los factores primos de:

$$8.943.587.117$$

Tardará un poco más, hasta descubrir que son 62.987 y 141.991.

Es decir, lo que quiero comunicar acá es que calcular el producto de dos números es algo sencillo. Tedioso, pero que no ofrece complicaciones. En cambio, encontrar los factores primos que componen un número, más allá de que también sea tedioso, es virtualmente imposible si los números son muy grandes. *Y ésta es la clave del método.*

Las computadoras más rápidas que se usan hoy tardarían más de 100.000 años en encontrar los factores que componen números de más de 400 dígitos (que son los que se utilizan). En consecuencia, no se trata de que el método que le voy a contar sea *inviolable*. De hecho, no es así. Sólo que con la metodología que se conoce hasta hoy, encontrar esos números es virtualmente imposible.

El tiempo dirá si aparece una nueva manera de factorizar números en sus componentes primos, que no sea usando las herramientas actuales. Si así fuere, habría que revisar todo, porque se transformaría en vulnerable.

Como es archiconocido, los aliados en la Segunda Guerra Mundial lograron decodificar los mensajes de los alemanes y de esa forma

lograron invadir Normandía en 1944 y, a partir de ahí, elaborar el triunfo final. Es decir, tratar de encriptar mensajes es un tema de alta sensibilidad.

Sin embargo, en 1976, dos científicos norteamericanos, Whitfield Diffie y Martin Hellmand, de la Universidad de Stanford, introdujeron una idea revolucionaria: “la clave pública”. ¿Qué quiere decir esto? Hasta ese momento, se operaba de la siguiente manera: tanto el emisor como el receptor tenían una llave secreta. El emisor la usaba para cerrar el mensaje (encriptarlo) y el receptor, para abrirlo (desencriptarlo). La idea de Diffie y Hellmand fue usar algunos teoremas conocidos de Teoría de números para lograr que una de las claves fuera pública. Es decir, ya no importaría que alguien interceptara el mensaje, sino que, además, cualquiera podría encriptar lo que quisiera. Usando el método de Diffie y Hellmand, la persona que quiere encriptar un mensaje puede publicar en el diario o en las páginas amarillas, o donde se le ocurra, cuál es la clave que usa. Pero lo extraordinario del descubrimiento es que, por más que uno tenga esos datos, no le sirven para decodificarlo! Eso sí: el receptor del mensaje sí tiene una clave privada que es la que usará para recuperar el mensaje original.

En resumen: el emisor *encripta* el mensaje usando datos que todo el mundo puede conocer y luego lo envía. El receptor *lo desencripta* usando la clave privada. Lo notable es que la parte que falta, o sea, la clave privada, es inhallable para cualquier otra persona que no sea el propio receptor, quien, de paso, no es que la encuentra sino que la tiene en su poder de antemano. De todas formas, a este proceso le faltaba algo. En teoría, funcionaba todo perfecto, pero ¿cómo hacer para conseguir una clave que fuera *tan* privada que nadie pudiera encontrarla?

En 1977, tres investigadores del MIT (Massachusetts Institute of Technology), Rivest, Shamir y Adleman, elaboraron un algoritmo que resolvió el problema. El algoritmo se conoce con el nombre de RSA (por las iniciales de los autores). Los tres científicos fundaron la compañía RSA Data Security, con la que se transformaron casi instantáneamente en millonarios, luego de haber patentado el proceso que aún hoy es el que se usa en todas partes.

De hecho, el propio Departamento de Defensa de los Estados Unidos interviene en el control de la empresa, ya que la clave es *tan inviolable* que permite mandar mensajes que nadie puede decodificar, poniendo –supuestamente– en riesgo la seguridad de un país.

Como dije antes, la rama de la matemática que interviene en este proceso se llama Teoría de números. Lo curioso es que el inglés Godfrey H. Hardy, uno de los matemáticos más famosos del siglo xx, escribió: “Prefiero considerar a mi campo de investigación como *matemática pura*, ya que nadie ha descubierto aún ninguna utilidad para la guerra aplicando la Teoría de números o la relatividad, y me parece muy raro que esto suceda en los próximos años”. Hardy fue un gran opositor (en aquella época) de toda guerra y es reconocido como tal; de todas formas, su predicción fue claramente errónea. No hace falta comentar cuán devastador fue para la humanidad el desarrollo de armas nucleares y, por otro lado, la Teoría de números ha sido *decisiva* en los temas de criptografía. Pero lo interesante del comentario es que, lo que en ese momento era considerado un ejercicio intelectual, terminó siendo la herramienta clave para el desarrollo de la criptografía moderna.

Una breve explicación –sin entrar en los detalles técnicos– de cómo funciona el mecanismo. Le pido que por favor trate de seguirme ahora, porque es la parte más relevante de toda esta historia. Si siente que se pierde, no se preocupe. Siga leyendo hasta que se sienta cómodo con el método y verá que –en principio– es sencillo de entender cómo funciona. Y eso es lo que pretendo hacer con lo que sigue. Supongamos que yo quiero mandar un mensaje a usted.

Lo primero que tengo que hacer es transformar el mensaje en un número. ¿Cómo hacer esto? Por ejemplo, adjudicándole a cada letra un par de dígitos. Así, si uno asigna a cada letra del alfabeto un número, tenemos:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Entonces, si el mensaje fuera

AMOR

corresponde poner el siguiente número:

01131619

De esa forma, a cada mensaje escrito en palabras le corresponde un número. Por supuesto, cuanto más largo es el mensaje más grande es el número. Pero no interesa: lo importante es que el mensaje *ahora* se transformó en un número, que llamaremos M.

Ahora empieza el proceso de encriptación y desencriptación. En realidad, salvo que uno tenga mucho tiempo y nada que hacer con él, conviene usar una calculadora o una computadora, pero de todas formas lo que me interesa con este texto es contar –sin entrar en tecnicismos– cómo se hace. Empiezo con un plan de lo que voy a hacer:

- 1) Busco el mensaje que quiero mandar. Digamos, para fijar las ideas, que quiero enviar el número 4.
- 2) Busco la clave pública que voy a usar para encriptar el mensaje. En este ejemplo, consiste de dos números: 33 y 7.
- 3) Usted (el receptor) conoce ya su clave privada, que también consiste en dos números: 33 y 3 (note que al 33 lo usamos los dos: usted y yo).

Con estos datos, yo hago lo siguiente:

PRIMER PASO:

Multiplico el mensaje, el número 4, siete veces por sí mismo (es decir, el mensaje lo elevo a uno de los números de mi clave):

$$4^7 = 16.384$$

SEGUNDO PASO:

Divido el resultado por 33 (que es el segundo número de mi clave) y me fijo cuánto *sobra* o cuál es el resto.

$$16.384 = 496 \cdot 33 + 16$$

Acá hago una pausa. Este número, 16, *es el mensaje codificado*. Esto es lo que voy a mandar y no me interesa que nadie lo intercepte. O sea, hasta acá, usé cuatro números:

- a) El mensaje: 4
- b) El primer número de la clave: 7
- c) El segundo número de la clave: 33
- d) Y con ellos fabriqué el cuarto número: 16.

Ahora, usted recibe el mensaje encriptado, que es el número 16. ¿Qué hace entonces?

Bueno, usa *su clave*, que consiste no sólo en el 33, sino también en el número 3 (¡y este número *sí* que es privado! Sólo usted lo conoce). Y hace lo siguiente:

TERCER PASO:

Multiplica el *mensaje* por sí mismo 3 veces. Es decir, eleva el mensaje que recibió al cubo, o sea,

$$16^3 = 4.096$$

CUARTO PASO (Y FINAL):

Divide el resultado, o sea 4.096, otra vez por 33 y calcula cuánto sobra:

$$4.096 = 124 \cdot 33 + 4$$

¿Qué pasó? Lo notable es que ahora, al hacer este proceso, ¡usted *descubre el mensaje que yo le mandé y que era el número 4!*

De hecho, lo invito a que elija el número que quiera como mensaje, y repita el procedimiento hasta convencerse de que no importa cuál sea el número original, luego de los cuatro pasos que figuran más arriba, usted lo va a *redescubrir*.

Un último ejemplo con claves diferentes, de manera tal que podamos verificar que todo lo que hice hasta acá está claro:

Mensaje  $M = 2$   
Clave pública: 85 y 13  
Clave privada: 85 y 5

Primer paso:

$$2^{13} = 8.192$$

Segundo paso:

$$8.192 = 85 \cdot 96 + \mathbf{32}$$

Luego, el mensaje encriptado es 32.

Tercer paso:

$$32^5 = 33.554.432$$

Cuarto paso:

$$33.554.432 = 394.758 \cdot 85 + \mathbf{2}$$

Como se ve, entonces, uno vuelve a recuperar el número 2, el mensaje original. Una vez que entendió estos ejemplos, avanzo un poco más.

En general, el método consiste en lo siguiente (ahora voy a usar *letras* para indicar tanto los mensajes como las distintas claves):

Datos:

Mensaje =  $M$

Clave pública =  $N$  y  $e$

Clave privada =  $N$  y  $d$

(se usan las letras  $e$  por potencia que sirva para *encriptar* y  $d$  para *desencriptar*).

Uno hace lo siguiente, entonces:

Primer paso: calcula  $M^d$

Segundo paso: divide el resultado por  $N$  y calcula el *resto*, que llamo  $R$ .

$$M^d = q \cdot N + \mathbf{R}$$

En consecuencia, el *mensaje encriptado ahora es  $R$* . El receptor recibe el número  $R$  y comienza a desencriptarlo.

Tercer paso: calcula  $R^d$

Cuarto paso: divide el resultado por  $N$  y calcula el resto, que tiene que ser  $M$ .

$$R^d = q'' \cdot N + \mathbf{M}$$

El número  $N$  se elige de manera tal que sea muy grande. ¿Qué quiere decir grande? Que tenga más de 400 (cuatrocientos) dígitos. Para tener en claro cuán enorme es un número así, basta pensar que todo el universo está compuesto por  $2^{300}$  átomos, o sea. aproximadamente un 1 seguido por 90 ceros.

Ahora bien: se elige este número  $N$  de modo que sea el producto de sólo dos números primos, cada uno de aproximadamente doscientos dígitos. Digamos que  $N$  se escribe como el producto, entonces, de dos números primos:  $p$  y  $q$ .

$$N = p \cdot q$$

Este número  $N$  es el que va a formar parte de las claves pública y privada. Ahora bien, uno se fabrica el siguiente número:

$$(p - 1) \cdot (q - 1) + 1$$

Éste también es un número muy grande, y cuando uno elige el número  $N$  tiene en cuenta que este otro número tiene que descomponerse también como producto de sólo dos primos. Y justamente, esos dos primos son los que llamé más arriba  $e$  y  $d$ . O sea,

$$(p - 1) \cdot (q - 1) + 1 = e \cdot d$$

Estos dos números,  $e$  y  $d$ , son los que completan las claves pública y privada. Como expuse más arriba, los números que son públicos son  $N$  y también  $e$ . Y la clave *privada* se compone del número  $N$  y del número  $d$ . Lo increíble (en apariencia) y *maravilloso* de este procedimiento es que el número que resulta como *resto* es justamente  $M$ , ¡el mensaje original!

En definitiva, la encriptación en la que el mundo de hoy confía depende de un par de resultados de la Teoría de números. La inviolabilidad del sistema radica en que –con los métodos actuales– es imposible factorizar un número descubriendo en un tiempo razonable (o sea, no medido en siglos) cuáles son los primos que lo componen. Hasta aquí estamos bien. El día que alguien descubra cómo hacerlo, los sistemas colapsarán y habrá que empezar de nuevo. Pero por ahora estamos bien.

## La educación de los jóvenes

Los jóvenes privilegiados que tienen apoyo económico paterno pasan las mañanas o las tardes durante doce años cursando el colegio primario y el secundario. ¿Pensó usted alguna vez si el *quantum* de información que adquieren en ese lapso es proporcional al tiempo que le dedicaron? Respuesta mía: rotundamente, no.

No se me escapa que la escuela primaria tiene ganado un lugar en el Paraíso en la medida en que transforma analfabetos en alfabetos, uno de los saltos cualitativos (culturalmente hablando) más espectaculares de nuestras vidas. Pero ¿*siete* años para lograrlo? ¿No es mucho? ¿No habrá llegado el momento también de reformular la enseñanza en ese estadio?

Tengo más preguntas:

- ¿es lógico que todos los chicos empiecen el colegio a la misma edad?
- ¿Está comprobado que los desarrollos o evoluciones personales ya están nivelados a los seis años, cuando todos deben comenzar?
- ¿No sería más razonable plantear que los niños, de los cinco a los nueve años, por ejemplo, sólo dediquen su tiempo a estudiar música, arte y hacer deportes, justo en el momento de sus vidas en que se generan y explotan gustos, tendencias y habilidades? Claro que también les enseñaría a leer, escribir, sumar, restar, etcétera.



Es más: yo propondría redefinir la palabra “alfabeto”, ya que hemos entrado en el nuevo siglo. ¿Alcanza la versión anterior? El siglo XXI exige el compromiso de tener educación gratuita, obligatoriamente bilingüe, con terminales de computadora instaladas en todas las escuelas del país, con conexiones vía Internet. Eso les permitirá a los chicos acortar distancias, “chatear” con jóvenes de otras partes, difundir sus gustos, cultura y conocer la de los otros.

También servirá para familiarizarse con los procesadores de texto, o con programas de diseño gráfico, de video, de fotografía o de música. En todo caso, la escuela primaria *es el lugar* para que enfrenten sus primeros desafíos, para estimularlos a que planifiquen estrategias, programen sus propios juegos o sus propios problemas. Ya no alcanza hoy un taller de lectura y una biblioteca o la sala de música convencionales. No alcanza con cantar el himno, izar la bandera, sentarse en el aula a escuchar pasivamente y esperar ansiosamente el recreo.

Sé que nuestros docentes no están hoy preparados para eso, ni lo estuvieron en la última parte del siglo pasado. Sé también que la escuela cumple una función social. Pero,

- ¿quién dijo que hemos preparado a ese plantel de docentes en el país para que cumplan con ese papel?
- ¿Les enseñamos acaso a ser contenedores de los chicos, moldeadores de sus futuros?
- ¿Quién les enseñó a enseñar?
- ¿Quién los adapta a las necesidades de hoy?
- ¿Quién les provee los elementos?
- ¿Quién les explica que la tarea del docente es generar preguntas, y no sólo dar respuestas a preguntas que los jóvenes no se han hecho? ¿No es acaso un abuso de autoridad el que cometemos hoy, decidiendo los futuros de nuestros hijos de esta forma tan desprotegida?

¿En dónde quedó el orgullo de otra época de mandar a los chicos a la escuela estatal? Antes, a la escuela privada no sólo iba el que

podía, sino el que “no podía”. Hoy es al revés. Los padres aspiran a que sus chicos tengan al menos una mínima educación. Y con la tendencia actual, falta poco para que también le pidamos rentabilidad a la cooperadora de la escuela.

## Soluciones

### Solución al problema de los dos pintores

La tentación es decir que si trabajan los dos juntos van a tardar *3 horas* en pintar la pieza. Sin embargo, uno contesta eso porque, en principio, *no está pensando*. Basta advertir que, si uno de los dos pintores *trabajando solo* tardaría 2 horas, no es posible que con ayuda de otro itarden más!

Estoy seguro de que hay muchísimas maneras de llegar a la solución. Más aún: ni siquiera creo que las dos que voy a proponer sean las mejores. Es decir: lo invito a a que imagine una respuesta que sea atractiva por lo breve y contundente. Por eso es que creo que no vale la pena leer lo que figura más abajo... Pero, si aun así usted insiste, aquí va.

Le propongo pensar lo siguiente. En una hora, el pintor que pinta más rápido, B, pinta *la mitad* de la pieza. El otro, A, mientras tanto, pinta *una cuarta parte* (ya que, como tarda 4 horas en pintar *todo*, en una hora pinta justo la *cuarta parte* de la pieza).



Ahora bien, hasta acá, entre los dos pintaron las *tres cuartas partes*. Relea lo que acabo de escribir: tres cuartas partes. O sea, tres veces una cuarta parte (eso es lo que significa tres cuartos de algo). Y tardaron una hora en hacerlo. Por lo tanto, como queda una cuarta parte por pintar, les hace falta la tercera parte de una hora. Piénselo conmigo otra vez: si en una hora pintaron tres cuartos, para pintar un cuarto (que es la tercera parte de  $3/4$ ), les hace falta usar la tercera parte de una hora, o sea, 20 minutos.

MORALEJA: los dos pintores juntos tardarán 1 hora y 20 minutos para pintar la pieza.

También podemos pensar el problema usando lo que nos enseñaron en el colegio como “regla de tres simple”. Como hice en la solución 1, sabemos que en *una hora* pintan  $3/4$  partes de la pieza. La pregunta es, entonces, ¿cuánto tardarán en pintar *toda* la pieza? Y para eso escribimos:

$$\begin{array}{l} 3/4 \text{ pieza} \text{ ————— } 60 \text{ minutos} \\ 1 \text{ pieza} \text{ ————— } x \text{ minutos} \end{array}$$

Para “despejar” la  $x$  (o para “calcular” la  $x$ ), hacemos

$$x = (1 \cdot 60) / (3/4) = 60 / (3/4) = (4/3) \times 60 = 80$$

Luego, en total, entre los dos tardarán 80 minutos, o sea, 1 hora y 20 minutos.

### Soluciones al problema de subir y bajar un 40%

- 1) Si usted hizo las cuentas, habrá advertido *que ino da lo mismo!* Es decir, si al número 100 uno le *descuenta un 40%*, se obtiene el número 60. Si ahora, uno incrementa un 40% al número 60, se obtiene el número 84. Es decir, *no da lo mismo deducir un 40% del número 100 y luego aumentárselo.*

- 2) De la misma forma, si uno empieza primero *agregando un 40%* al número 100, obtiene el número 140. Si luego a este número (140) le *descuenta un 40%* (haga la cuenta acá antes de seguir leyendo), el resultado es 84. Es decir, *tampoco se vuelve al número 100 de partida.*

Por un instante, quiero hacer una cuenta que abarque **MÁS** que al número 100. Si uno empieza con un número  $A$  cualquiera, si primero le aumenta un 40% y luego, al número que obtuvo, le deduce un 40%, *no vuelve al mismo número*. Y lo mismo sucede al revés, si uno empieza *deduciendo* primero y *aumentando* después.

¿Cómo se puede *demostrar* esto en general?

- a) Para *descontar* el 40% de un número  $A$  lo que hay que hacer es:

$$(0,6) \cdot A \quad (1)$$

Esto, en realidad, calcula el 60% de  $A$ , pero es exactamente lo que uno quiere, porque queremos saber a qué número se llega primero cuando uno descuenta el 40% del número  $A$ .

- b) Para *incrementar* un 40% a un número  $B$  cualquiera, lo que hay que hacer es:

$$(1,4) \cdot B \quad (2)$$

Luego, usando los resultados de (1) y (2), se tiene:

Situación inicial	A
Descuento el 40%	(0,6) · A
Aumento el 40% a este número	(1,4) · (0,6) · A

Y este último número es

$$(1,4) \cdot (0,6) \cdot A = (0,84) \cdot A \quad (3)$$

Luego, no se vuelve al número  $A$  original, sino a  $(0,84) \times A$ , que es 16% menor que el que había al principio.

Si uno va para el otro lado, es decir, comienza incrementando un 40%, se tiene:

Situación inicial	$A$
Incremento el 40%	$(1,4) \cdot A$
Descuento el 40% a ese número	$(0,6) \cdot (1,4) \cdot A$

Este último número es el mismo que teníamos en (3), pero uno descubre que *no se obtiene*  $A$  sino un 84% de  $A$ . O sea,

$$(0,6) \cdot (1,4) \cdot A = (0,84) \cdot A \quad (4)$$

Luego, la respuesta a las dos primeras preguntas es que no se vuelve al número original. Lo que sí sucede (interesante) es que, si uno ganara en el casino un 40% del dinero que llevó y luego pierde un 40%, si bien no llegará al mismo número con el que empezó (porque perdió un 16%), llegará al mismo número que si hubiera empezado *perdiendo un 40% y luego recuperando el 40%*.

Para contestar a la tercera pregunta, es fácil comprender que, si en lugar de haber usado el 40% hubiera tomado *cualquier otro porcentaje*, el resultado sería el mismo. El número 40 es un número cualquiera que elegí para hacer la pregunta, pero habría servido cualquier otro.

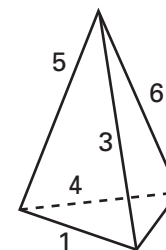
Lo invito a pensar en algo más: si al final del proceso uno termina *descontando el 100%*, el resultado final tiene que ser *icero!* Luego, si uno empieza con cualquier número  $A$  y lo incrementa en un 100% (o sea, lo multiplica por dos), y luego, al resultado (que es  $2A$ ) le descuenta el 100%, lo que se obtiene es... *icero!* Y lo mismo pasa para el otro lado. Incluso más rápido. Porque si uno empieza con  $A$  y le descuenta el 100%, se queda con *cero*. Aunque ahora uno pretenda aumentar el 100%, lo que tendrá seguirá siendo *cero*. Sin embargo, el número  $A$  no se recupera más. ¿No resulta interesante todo esto?

## Solución al problema de los seis fósforos

No sé si a usted se le ocurrió (o no) la solución de este problema. En cualquier caso, *nos pone a prueba*.

Si contestó que *no*, que *no* se pueden construir los *cuatro triángulos*, su respuesta es incorrecta. Pero tiene una explicación, algo que nos sucede a la mayoría de los humanos. Uno busca, dibuja, hace gráficos y se desespera porque *no puede encontrar la respuesta*.

Es que el problema no tiene solución... *ien el plano!* Es decir, si usted intentó hacer un *dibujo* en un papel, o si tomó los fósforos de verdad y quiso encontrar la manera de formar los triángulos, haciendo distintos intentos en una mesa o escritorio, no pudo. Lo que pasa es que, para dar con la solución, lo que hay que hacer es salirse del plano y pensar en tres dimensiones. En realidad, lo que hay que hacer es pensar (y construir... Hágalo usted solo/a) una pirámide con base triangular.



En este caso, si cuenta cada cara de la pirámide, resulta ser un triángulo, y como hay cuatro caras, entonces, hay cuatro triángulos equiláteros, que es exactamente lo que queríamos.

¿Qué enseña esto? Que si uno *no sale de la dimensión en la que se encuentra, es imposible que encuentre la solución*. Nos enseña a pensar distinto, a no quedar restringido o atrapado sólo en lo que uno ve. Peor aún: uno tiene la tentación de abdicar, y de decir que *el problema no tiene solución*, cuando en realidad *sí tiene... sólo que no la encontrará* donde usted la estaba buscando. Ni yo.

### Solución al problema de la balanza desbalanceada

Primero, ponga las dos pesas (5 kilos + 5 kilos) sobre *uno* de los platillos. Ponga azúcar en el otro hasta que los dos platillos queden a la misma altura. Cuando lo logró, *retire las dos pesas* y reemplácelas con azúcar hasta que los platillos queden otra vez a la misma altura.

Obviamente, el azúcar que le hizo falta poner en el platillo en donde estaban las dos pesas cumple con lo que usted quería: *ipesa 10 kilos!*

### Solución al problema de los tres recipientes con monedas

Sí, se puede.

Uno retira una moneda del recipiente que dice “Mezcla”. Se fija qué tipo de moneda es. Puede ser o bien de 5 centavos o de 10.

Supongamos que es una moneda de 5. Como la etiqueta de la que sacó la moneda decía “Mezcla”, está claro que *ese* recipiente *no* es el de la mezcla. Entonces significa que ya encontró el recipiente al cual ponerle la etiqueta que diga “Monedas de 5 centavos”.

Por otro lado, el recipiente que tiene la etiqueta que dice “Monedas de 10 centavos” tiene que ser el que contenga la “mezcla”. ¿Por qué? Porque, por un lado, no puede ser el de las monedas de 10 ya que, si no, tendría la etiqueta correcta. Luego, sólo puede ser el de las monedas de 5 o el de la *mezcla*. Pero el de las monedas de 5 tampoco puede ser, porque ésa fue la primera que sacamos. Luego, allí debería decir “Mezcla”.

Listo. En el primer recipiente va la etiqueta que dice “Monedas de 5 centavos”, en el que dice “Monedas de 10 centavos” va la que dice “Mezcla” y en el que queda va la etiqueta que dice “Monedas de 10 centavos”.

MORALEJA: uno escuchó muchas veces decir “hay que leer bien el enunciado”, o lo que en la vida cotidiana significa “estar muy atento a *todos* los detalles y no pasar nada por alto”.

El problema anterior es un buen ejemplo de esto ya que si uno *no* presta atención a la parte del enunciado que dice “*en recipientes que no correspondían*”, no puede resolver bien el problema. Como suele decir Gerardo Garbulsky, es un aprendizaje *de vida* muy interesante.

### Solución al problema de las cuatro mujeres y el puente

Primer viaje: van las mujeres 1 y 2. En total usaron 2 minutos.

Segundo viaje: vuelve la mujer 2 con la linterna. Pasaron 4 minutos.

Tercer viaje: van las mujeres 3 y 4. Ellas tardan 10 minutos, más los 4 que se habían usado antes, suman 14.

Cuarto viaje: vuelve la mujer 1 con la linterna (que había quedado en la otra orilla luego del primer viaje). Total consumido: 15 minutos.

Quinto (y último) viaje: van las mujeres 1 y 2. Tardan 2 minutos en este viaje, y en total, 17 minutos.

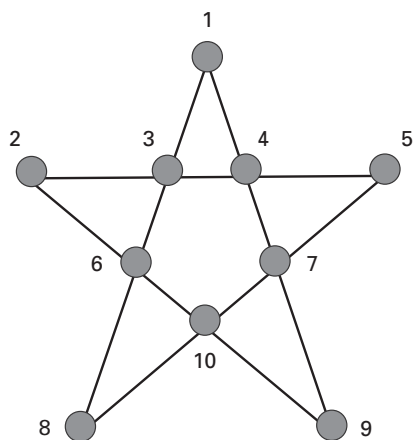
MORALEJA: no interesa si a usted se le ocurrió la solución o la leyó. No importa. Lo que sí interesa es que descubra por qué le costó trabajo. Piense: ¿usted no intentó todas las veces que las mujeres que tardan más (5 y 10 minutos) vayan juntas de una orilla a la otra? Casi seguro que sí. Pero, ¿dónde estuvo la diferencia? Es que en la solución se advierte que una de las dos mujeres que tardan menos (las de 1 y 2 minutos) estaba ya esperando en la otra orilla para traer la linterna de vuelta! De esa forma, uno ahorra minutos y no necesita usar más ni a la de 5 ni a la de 10 minutos.

Y ésa es la clave. Haber hecho viajar a las de 1 y 2 minutos primero, para que una de las dos (no importa cuál) se quede allá para

traer la linterna cuando hayan llegado las de 5 y 10 minutos. La manera distinta de pensar el problema pasó por ahí.

Pero claro, como en la vida, ahora que uno sabe la solución, todo es más fácil.

### Solución al problema de las 10 monedas



### Solución al problema de los cuatro interruptores

La ventaja que uno tiene ahora (y no tenía en el momento de pensar el problema original) es que, quien alguna vez lo dedujo, sabe que no alcanza con mirar: ¡hay que tocar la lámpara! Hay que poder medir la temperatura, para poder usar ese dato.

Entonces, pensemos juntos la solución, sabiendo que la temperatura de la lámpara tendrá incidencia. Ahora, veamos cómo.

Si “encendemos” los interruptores 1 y 2 durante 10 minutos y entramos en el cuarto, ¿qué ganaríamos? Si está la luz encendida, no sabríamos si fue el 1 o el 2. Y si está apagada, sólo sabríamos que la lámpara se activa o bien con el 3 o bien con el 4. Y si tocamos la lámpara, no nos va a decir nada tampoco, porque la única manera de que esté caliente es si está encendida. Y si está fría, tampoco nos dice nada, porque puede ser que se active con el 3 o el 4.

Sin embargo, creo que después de haber leído estas últimas consideraciones, usted debe haber pensado algo más. Y creo que sí, que tiene razón. Si uno enciende los interruptores 1 y 2, los deja 10 minutos, antes de entrar apaga el 2 y enciende el 3, y ahora sí entra rápido en la pieza, pensemos si hemos avanzado más.

¿Qué puede pasar al entrar rápido en la pieza? La luz puede estar encendida o apagada, obviamente. Sin embargo, hay una diferencia sensible. Puede que esté encendida pero fría. En ese caso, como no hubo tiempo de que se calentara aún, tiene que ser el interruptor número 3, que fue el último que encendimos. En cambio, si está encendida pero caliente, significa que es el número 1 el que activa la luz, ya que es el que estuvo encendido los 10 minutos previos.

Tenemos el problema resuelto si la luz está encendida. ¿Y si está apagada? (Una vez más, me hago a un costado para que usted siga deduciendo solo/a.) Si está apagada, puede que la lamparita esté o bien fría o bien caliente. Si está caliente, eso significa que el interruptor que desactivé inmediatamente antes de entrar, el número 2, es el que activa la lámpara.

(¿Me sigue con este razonamiento? Si le parece que no lo entendió, retroceda y lea de nuevo. No va en demérito de nadie no entender un argumento...)

Por último, si la lámpara está apagada y además fría, entonces el interruptor que activa la luz es el número 4.

En resumen, el aporte de Fernando fue muy bueno, porque sirvió para generalizar aún más un problema que parecía cerrado con el caso de los tres interruptores.

### Solución al problema de las ocho monedas

En la primera pesada, se separan *seis* de las ocho monedas y se ponen *tres en cada platillo*.

¿Qué puede pasar? Hay tres posibilidades:

- Que los dos platillos estén nivelados.
- Que el platillo de la izquierda pese más.
- Que el platillo de la derecha pese más.

Veamos cómo resolver el problema en cada caso.

En el caso (a), como los dos platillos están nivelados, sabemos que entre esas seis monedas *no está la que buscamos*. Tiene que estar forzosamente entre las dos que no pesamos. Como aún nos queda una pesada, ponemos una moneda en cada platillo y, el que pesa menos va a ser el que contiene la moneda que buscamos.

En el caso (b), el platillo de la izquierda pesa más, implica que el de la derecha contiene la moneda que buscamos. Es una de las *tres* que están en ese platillo. De esas tres, ponemos una en el platillo de la izquierda, y una en el de la derecha. Si los platillos quedan nivelados, entonces la moneda que *no usamos* es la que estamos buscando.

En cambio, si los platillos no están nivelados, el que pesa menos contiene a la moneda más liviana. Y listo.

El caso (c) es el mismo que (b), sólo que las monedas que elegimos para la última pesada son las que están en el platillo de la izquierda.

### Solución al problema de la barra de chocolate

Lo típico es empezar dividiendo la barra por la mitad. Luego, hacer lo mismo con ambas mitades: es decir, en cada paso, partir cada bloque por la mitad. En realidad, lo interesante es que *no importa en qué orden usted haga los cortes*. La idea es mirar el problema desde otro lugar. Después de cada corte, uno tiene dos bloques de choco-

late. Cuando corte cualquiera de esos dos bloques (independientemente de dónde o cómo lo corte), va a tener tres bloques. O sea, cada vez que corta, agrega un bloque más a los que tenía antes. Luego, después de 199 divisiones, uno tiene las 200 piezas de chocolate que buscaba. Es decir, 199 es la cantidad mínima de cortes que hay que hacer. Menos, no alcanzarían. Más, no le harían falta tampoco.

Lo que esto enseña es que cualquier camino conduce a la solución ideal. Y eso es lo que vale la pena destacar, más allá del problema en sí mismo: haga lo que haga, o haya hecho lo que haya hecho, su solución fue perfecta. Sólo que el argumento que figura en el párrafo anterior es lo que justifica que no hay ninguna otra forma más efectiva.

### Solución al problema de un cambio en la rutina

Con los datos que uno tiene, se sabe que la mujer y el marido llegaron de vuelta a la casa 10 minutos antes que de costumbre. Esto significa que la mujer viajó 10 minutos menos en auto, o lo que es lo mismo, 5 minutos menos en el viaje de ida y 5 minutos menos en el viaje de vuelta.

Dicho esto, ahora podemos (juntos) concluir lo siguiente: el marido caminó 55 minutos desde la estación hasta el lugar en donde encontró a la mujer. ¿Por qué?

La mujer siempre pasa a buscar al marido a las 5 de la tarde. Como tuvo que haber manejado 5 minutos menos al ir, eso significa que lo encontró a las 4:55. De esta forma, al dar la vuelta en ese momento, como también manejará 5 minutos menos al volver, llegarán 10 minutos antes que lo habitual.

CONCLUSIÓN: el señor caminó 55 minutos.

Como se ve, una vez conocida la solución, el problema en sí mismo es muy fácil. Claro, es muy fácil una vez que uno conoce cómo se resuelve, pero la moraleja que pretendo sacar con este ejemplo es

mostrar cómo muchas veces uno mira un problema desde un lugar equivocado, quiere forzar mentalmente que algo pase y cuando le parece que no le alcanza, protesta porque cree que le faltan datos. Bueno, este ejemplo muestra lo contrario, y una vez más forma parte de la belleza de la matemática, que provee una herramienta de una potencia maravillosa para aprender a pensar.

### Solución al problema de las dos tías y los dos colectivos

En lugar de plantear la solución general, lo invito a que descubramos juntos con un par de ejemplos dónde está la dificultad.

Para fijar las ideas voy a suponer que Juan sale en cualquier momento de su casa, pero siempre cuando el segundero del reloj está en el doce. O sea, cuando se cumple justo algún minuto. Esto es: sale 3 minutos después de la hora, o 7 minutos después de la hora, o 18, o 23... pero siempre en un momento exacto. ¿Se entiende? No es una restricción mayor, es simplemente para poder entender mejor lo que sigue. Ahora sí, los ejemplos.

#### PRIMER CASO

El colectivo rojo pasa a los 0, 10, 20, 30, 40 y 50 minutos después de la hora.

El colectivo azul pasa a los 1, 11, 21, 31, 41 y 51 minutos después de la hora.

Hagamos la cuenta ahora de las veces que Juan tomaría cada colectivo. Él puede salir de su casa a:

- 0 toma el rojo (que justo llega)
- 1 toma el azul (que llega justo también)
- 2 toma el rojo (que llega “y 10”, antes que el azul que recién pasa a las “y 11”)
- 3 toma el rojo (por la misma razón)
- 4 toma el rojo (recuerde que el azul no llega hasta “y 11”)
- 5 toma el rojo...

Y lo mismo sucedería (subir al colectivo rojo) si Juan saliera a las “y 6”, “y 7”, “y 8”, “y 9”, “y 10”. Es decir, *la única* manera que tiene Juan de tomar el colectivo azul, es si sale y “1, 11, 21, 31, 41, 51”, o sea, sólo en seis momentos durante la hora. En cambio, tiene los restantes cincuenta y cuatro minutos para salir de su casa y tomar el colectivo rojo.

#### SEGUNDO CASO

El colectivo rojo pasa a las 0, 10, 20, 30, 40 y 50 minutos después de la hora.

El colectivo azul pasa a las 2, 12, 22, 32, 42 y 52 minutos después de la hora.

Juan puede salir de su casa a:

- 0 toma el rojo (que justo llega)
- 1 toma el azul (que llega “y 2”)
- 2 toma el azul (que llega justo en ese momento)
- 3 toma el rojo (porque llega “y 10”, mientras que el próximo azul llega “y 12”)
- 4 toma el rojo (por la misma razón)
- 5 toma el rojo...

Y siguiendo de esta forma, Juan también tomará el colectivo rojo si sale de su casa cuando se cumplen 6, 7, 8 o 9 minutos antes de la hora. Es decir, en los primeros 10 minutos, tomará el colectivo rojo saliendo en *ocho* oportunidades, y el azul en las *dos* restantes.

Acá me quiero detener y hacer dos preguntas:

- a) ¿Entendió por qué hay tanta diferencia entre las veces que Juan toma el colectivo rojo con respecto al azul? Si no, lo invito a que haga un pequeño dibujo, y lea nuevamente el texto. No tiene sentido que avance si no se convenció.
- b) Y si entendió, ¿se da cuenta de *por qué* se produce la diferencia entre los dos primeros casos? Es decir, en el primer



caso, Juan toma el colectivo rojo nueve veces de cada diez, y el azul, la restante. En el segundo caso, toma el colectivo rojo ocho veces de cada diez, y el azul en las dos restantes. Si uno siguiera con el proceso, y el colectivo azul pasara cuando se cumplen 3, 13, 23, 33, 43 y 53 minutos pasada la hora, en ese caso Juan tomaría el colectivo rojo siete veces de cada diez, y el azul, las otras tres veces.

Es decir que lo que importa es la *diferencia relativa* entre el momento en que pasa un colectivo y cuando pasa el otro.

¿Habría algún caso en que la cantidad de veces que tome el azul y el rojo sea la misma? (No lea la respuesta que voy a escribir inmediatamente acá abajo... Piénsela usted).

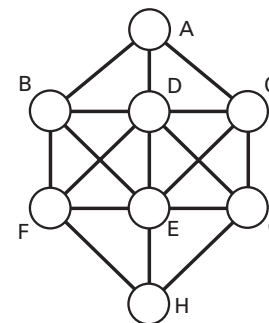
La respuesta es sí, y se produce cuando la diferencia relativa entre las llegadas de los dos colectivos es de justo cinco minutos. En ese momento, Juan toma el colectivo rojo cinco veces de cada diez, y el colectivo azul, las cinco veces restantes.

¿Qué quiero decir con *diferencia relativa*? Llamo así a la distancia de tiempo entre la llegada de los dos colectivos, o sea, cuánto tiempo tiene que transcurrir para que pase uno de cada color. De esta manera, una vez que pasa uno de los dos colectivos, el otro puede pasar al minuto, a los 2 minutos, a los 3, a los 4, etc. Si tarda *menos* de 5 minutos en llegar, ése será el que Juan tomará menos. Si tarda *más* de 5 minutos en pasar, ése será el que Juan tomará más veces. Y si *justo* pasa a los 5 minutos, en ese caso, Juan visitará a sus tías con la misma frecuencia.

### Solución al problema de los ocho números conectados

Veamos. El problema tiene diferentes soluciones, pero todas bastante similares entre sí. La parte interesante es *mostrar* que uno en realidad no *encuentra* la solución sino que *la descubre*, o mejor dicho, *la construye*.

Analicemos la situación de cada vértice, y veamos cuántos segmentos llegan o salen de él.



A los vértices A y H llegan (o salen, pero es lo mismo) *tres* segmentos.

A los vértices B, C, F y G llegan *cuatro* segmentos.

A los vértices D y E llegan *seis* segmentos.

Es decir que, si bien hay mucha *simetría* en el dibujo (cosa que vamos a enfatizar al final), podemos agrupar los vértices en tres, de acuerdo con el número de segmentos que llegan o salen a ellos:

- A y H
- B, C, F, y G
- D y E

Ahora lo invito a pensar cada paso conmigo, parando en cada uno para reflexionar (eventualmente solo/a), tratando de entender, o eventualmente, de avanzar sin leer lo que sigue.

Analicemos los números que tenemos que distribuir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. ¿Cuántos consecutivos tiene cada uno?

El número 1 tiene *un* solo consecutivo: el 2.

El número 8 tiene *un* solo vecino: el 7.

En cambio, los restantes (2, 3, 4, 5, 6 y 7) tienen *dos consecutivos* cada uno.

Es decir, en el lugar donde ponga, digamos el 2, ¿qué números pueden estar conectados con él? Hay *cinco números*: el 4, 5, 6, 7 y 8. O sea que el número 2 sólo puede estar ubicado en un vértice que no tenga más que cinco segmentos que entran o salen. Luego, no puede ir ni en D ni en E.

Lo interesante de esto que acabo de escribir es que no sólo ocurre con el número 2, sino también con el 3, 4, 5, 6 y 7.

MORALEJA: los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7 no pueden estar ubicados ni en el vértice D ni en E. Esto nos deja en una buena posición, porque ahora sabemos que si el problema va a tener solución, la única alternativa para D y E es que hacia allí vayan –indistintamente– los números 1 y 8.

Veamos: como del vértice D salen *seis* segmentos, si pusiéramos allí el número 1, ¿se violaría algo de lo que pide el problema? No lo creo. Veamos: el número 1 tiene sólo un número consecutivo: el 2. Luego, quedan exactamente seis números para usar: 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Es decir, podemos poner el número 1 en el vértice D.

De la misma manera –ya que son casos simétricos– podemos poner el número 8 en el vértice E (y con esto ya tenemos dos números ubicados y dos vértices ocupados).

Ahora vamos a ver cómo, habiendo ubicado el número 1 allí, *condiciona fuertemente* todo lo que sigue. Como el número 1 está ubicado en el vértice D, del que salen *seis segmentos*, eso significa que voy a tener que usar, *en los seis vértices* que están conectados con D, a los *seis números que* no son consecutivos con 1. Es decir, estamos obligados a poner el número 2 en el vértice H, ya que es el único que no está conectado con el vértice D (que es donde está el número 2).

Con el mismo argumento, como el número 8 está ubicado en el vértice E, el único número consecutivo con el 8 (el número 7) tiene que ir ubicado en el vértice A.

Y esto ya nos ha allanado el camino. Hasta acá tenemos ubicados cuatro números que ocupan cuatro vértices:

En el vértice A va el número 7.

En el vértice H va el número 2.

En el vértice D va el número 1.

En el vértice E va el número 8.

Si mira el dibujo, verá que tenemos ubicada *la columna vertebral* del problema. Sólo nos falta llenar las puntas. Pero, claro, ahora hay más libertad para moverse. Necesitamos ubicar los números (3, 4, 5 y 6).

El vértice B está conectado con cuatro vértices (fíjese en el dibujo por favor), y como en el A ya está el 7, significa que en B no puede ir el 6. Podemos poner el 3 o el 4 o el 5. Elijamos el 3.

Ahora, como en B está el número 3, de los que quedan (4, 5 y 6), en F no puede ir el 4, pero parecería que cualquiera de los otros dos sí. Sin embargo, si elijo el 6, después me van a quedar para los vértices C y G dos números consecutivos: el 4 y el 5. Luego, *no queda más alternativa* que poner el número 5 en el vértice F. Ahora, ya se termina el problema, porque sólo quedan por distribuir los números 4 y 6, que ubicamos en los vértices C y G respectivamente. Pero como en el vértice A está el número 7, en C no puede ir el 6. Forzosamente, entonces, tiene que ir el 4. Y en el vértice G irá el último que nos queda: el número 6.

La distribución entonces es:

$$A = 7$$

$$B = 3$$

$$C = 4$$

$$D = 1$$

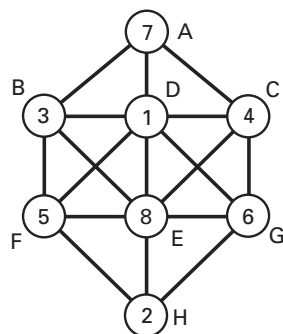
$$E = 8$$

$$F = 5$$

$$G = 6$$

$$H = 2$$

Ésta es entonces la solución del problema:



Aquí van algunas puntualizaciones.

- El problema es simétrico, en el sentido de que se puede dar vuelta el dibujo, ponerlo “cabeza abajo”, y se obtiene lo mismo. Hay vértices que son intercambiables por esta simetría y, por lo tanto, haber usado el número 1 en el vértice D, y el número 8 en E es una de las elecciones posibles. Pero pude haber elegido al revés. Nada habría cambiado. Y ésa es una moraleja importante, porque muchas veces, cuando uno se enfrenta con un problema, hay ciertos factores de simetría que permiten “grados de libertad” en la elección.
- El razonamiento que llevó a la solución es “casi inductivo”, en el sentido de que “fuimos construyendo” la solución. Pero no sabíamos si la había o no. Podría no haber habido solución, pero si existía, la teníamos que encontrar con el tipo de argumentos que utilizamos. Esto también es hacer matemática.
- Más allá de que usted se enfrente o no con problemas de este tipo, las argumentaciones descriptas más arriba son características de determinado tipo de situaciones que se plantean en la matemática así como en la vida. Aprender a contar, a combinar, a estimar. En todo caso, es como aprender a pensar hacia adelante.

En definitiva, es una manera de *educar el razonamiento*, y de *aprender a pensar*.

### Solución al problema de Fermi

Voy a tratar de estimar el número de pelotas que entran en el campo de una cancha de fútbol. Sin hacer un cálculo perfecto (ni mucho menos), creo que puedo estar tranquilo si *estimo* que una pelota apoyada no *mide* más de 25 centímetros. Es decir, uno puede afirmar que en *un metro* uno puede poner *4 pelotas*, y por lo tanto, en *un 1 metro cuadrado* entran 16 pelotas.



Ahora bien, ¿cuántos metros cuadrados tiene un campo de fútbol? Para eso, hay que tener idea de las dimensiones del lugar en donde se juega al fútbol. Otra vez, sin pretender ser *exactos*, puedo considerar que mide 100 (cien) metros de largo y 70 metros de ancho. Es decir, son unos 7.000 metros cuadrados.

Aquí podemos hacer dos cosas:

- Si usamos el dato de que entran 16 pelotas en *un* metro cuadrado, hay que multiplicar 16 por 7.000 para saber cuántas entran en una cancha. Resultado (aproximado, por cierto):

112.000 pelotas

- b) Si en lugar de hacer la estimación usando los metros cuadrados (7.000) usamos el dato de que entran 4 pelotas por metro, se tienen 400 pelotas por el largo de la cancha. Por otro lado, ahora “a lo ancho” se tienen  $4 \times 70 = 280$  pelotas. Luego, hay en total (aproximadamente, otra vez):

$$400 \times 280 = 112.000 \text{ pelotas}$$

MORALEJA: aun en un estadio como el de River (o en cualquier otro de esas dimensiones), si uno distribuyera pelotas sobre el campo de juego, alcanzaría (y sobraría) para darle una pelota de recuerdo a cada espectador.

Si a usted le interesa la precisión, agrego aquí algunos datos:

- a) Hay 44 estadios en el mundo (de acuerdo con la página de la FIFA) que admiten más de 100.000 espectadores. El más grande del mundo es el Maracanã, con cerca de 200.000, por lo que allí es posible que las pelotas no alcancen, aun teniendo en cuenta que las medidas del campo son las más grandes del mundo.
- b) Las medidas “oficiales” de una pelota son entre 68 y 70 centímetros de circunferencia. Si uno usa la fórmula para calcular el perímetro de una circunferencia

$$(\pi) \times (\text{diámetro de la pelota}) = 70.$$

Entonces,

$$\text{diámetro de la pelota} = 70 / \pi = (\text{aprox.}) 22,29 \text{ cm}$$

Luego, hicimos bien en estimar el diámetro de la pelota como de 25 centímetros, porque, al hacer la cuenta, hubieran entrado entonces *más pelotas* en el campo. Pero igual, aun entrando *menos*, hubiéramos podido satisfacer a todos los espectadores.

### Solución al segundo problema de Fermi

Si sigo con la estimación de que cada pelota tiene 25 centímetros de diámetro, entonces cada caja tiene  $(25 \times 25 \times 25) = 15.625$  centímetros cúbicos.

¿Cuántas cajas entran en un metro cúbico? Como en un metro cúbico entran 1.000.000 de centímetros cúbicos, dividiendo

$$1.000.000 / 15.625 = 64 \text{ (aprox.)}$$

Luego, en un metro cúbico entran *64 cajas*, o sea, 64 pelotas. Como cada camión puede transportar 20 metros cúbicos, puede llevar entonces 1.280 pelotas (o cajas). Pero necesitamos transportar 112.000 pelotas, por lo que necesitaremos

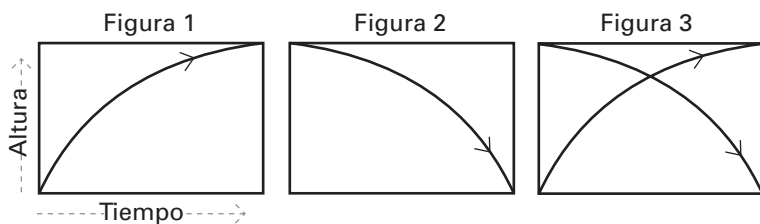
$$112.000 / 1.280 = 87,5 \text{ camiones}$$

En definitiva, para transportar todas las pelotas necesitamos una flota de casi 90 camiones con una capacidad de 20 metros cúbicos de mercadería, para llevar más de 112.000 pelotas hasta la cancha.

### Solución al problema de la montaña

Estoy seguro de que este problema debe de tener muchas maneras de atacarlo. Yo voy a presentar una, que es la que me queda más cómoda, pero valdrá la pena que le dedique tiempo, antes de leer lo que sigue.

El problema parece muy complicado, porque, como uno *no sabe* qué hizo el hombre ni al subir ni al bajar (ya que pudo quedarse descansando horas, subir, bajar, volver a subir, volver a bajar, etc.), ¿cómo puede hacer uno para contestar el problema en *todos* los casos? Veamos los siguientes dibujos:



¿Qué tendrán que ver estos gráficos con el problema? Más aún: ¿qué tendrá que ver este problema con “la matemática”?

Hagamos de cuenta que en lugar de un solo señor, hay dos. Uno sale desde abajo hacia arriba, y el otro, al revés, de arriba hacia abajo. En la figura 1, se ve al primero, y en la figura 2, al segundo. Lo que está representado, por un lado, es el tiempo que van recorriendo (en el segmento horizontal de cada rectángulo), y la altura en la que se encuentran en cada momento está representada por el segmento vertical. Ambos salen a las cero hora del lunes, y llegan a las 24 a destino. Eso sí: como los dos *usan* el mismo camino, en algún momento del recorrido *ise van a tener que encontrar!* (y eso es lo que muestra la figura 3). Es que más allá de lo que hagan durante el trayecto (descansar un poco, subir, bajar, quedarse en un lugar durante mucho o poco tiempo... no importa), como uno sube y el otro baja tiene que haber al menos un lugar de la montaña en el que se tropiezan uno con otro. ¡Y eso es lo que necesitábamos!

¿Por qué? Es que esta forma de pensar el problema permite resolver lo que había planteado originalmente. ¿Cómo usar este modelo, entonces, para el caso que nos ocupa? Bueno, recién suponíamos que había *dos* señores, uno que subía y otro que bajaba, pero *el mismo día*. De hecho, si ahora tomáramos el problema original, y en lugar de dos hombres hubiera uno solo, lo que acabamos de ver demuestra que tiene que haber alguna altura de la montaña (al menos una) por donde el hombre pasó al subir y al bajar *ia* la misma hora! Y justamente eso era lo que queríamos demostrar.

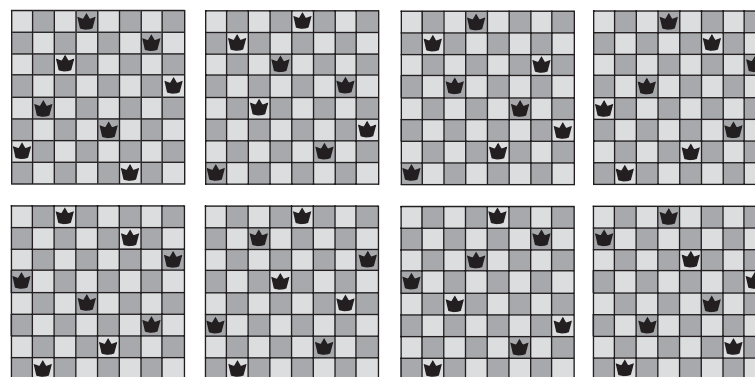
Por último, ¿qué tiene que ver con la matemática? Es que con la figura 3 uno ve que, como las dos *curvas* que representan las trayec-

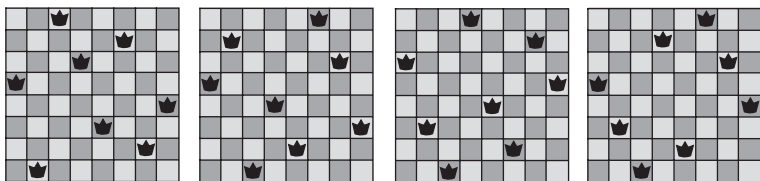
torias *son continuas* y unen, una el extremo superior izquierdo con el inferior derecho, y la otra, el inferior izquierdo con el superior derecho... esas dos curvas *ise* tienen que cortar al menos una vez! Y eso es justamente lo que me hacía falta para demostrar lo que queríamos.

Lo que este problema enseña es que, si bien el planteo original lo exhibe como muy complicado y difícil de pensar, puesto de la otra manera, parece una tontería. El objetivo es entender que muchas veces vale la pena *pensar distinto*, desde otro ángulo, aunque –en principio– no parezca promisorio. Frente a un problema entonces, por más inaccesible que parezca, es posible que haya otra forma de mirarlo que lo haga sencillo. Es sólo cuestión de paciencia y entrenamiento.

### Solución al problema de las ocho reinas

No se conoce un método que provea todas las soluciones, salvo el que consiste en ir consiguiéndolas de a una. Lo que sí se sabe es que, en el caso de las ocho reinas, hay sólo 12 soluciones primitivas, es decir, aquellas que son genuinamente diferentes, en el sentido de que no se puede empezar en una de ellas y, por reflexiones y/o rotaciones, llegar a otra. En total, aceptando rotaciones y reflexiones, hay 92. Reproduzco algunas de ellas:





Es interesante notar que uno puede *generalizar este hecho y ampliar y/o disminuir el número de reinas*, así como *ampliar y/o disminuir el correspondiente tablero*.

Es decir, uno puede tomar un tablero de 14 x 14 y el problema se transforma en ubicar 14 reinas que no se puedan *atacar*.

O hacer lo mismo con un tablero de 4 x 4, con *cuatro reinas*.

Para aquellos que estén interesados en algunos casos más generales, se tiene la siguiente tabla, donde se indica la distribución posible según el número variable de reinas:

Reinas	Primitivas	Distintas
1	1	1
2	0	0
3	0	0
4	1	2
5	2	10
6	1	4
7	6	40
8	12	92
9	46	352
10	92	724
11	341	2.680
12	1.787	14.200
13	9.233	73.712
14	45.752	365.596
15	285.053	2.279.184

Por otro lado, uno puede plantear *otros problemas relacionados con éste*. Por ejemplo, en un tablero de 8 x 8, ¿cuántos caballos o alfiles o reyes se pueden poner? Aquí, como siempre, le sugiero realizar una pausa y dedicarle un tiempo a pensar cada una de estas situaciones sin seguir leyendo lo que sigue.

Pero el libro continúa: se sabe que en un tablero de 8 x 8, se pueden ubicar 32 caballos, o bien 14 alfiles, o bien 16 reyes, sin que ninguno ataque a ningún par.

### Solución al problema del cronómetro y las infinitas monedas

La tentación es decir, naturalmente, que en la caja hay infinitas monedas. De hecho, después de los primeros 30 segundos hay 9 monedas, después de los 45 hay 18 monedas. Pasados 52 segundos y medio, hay 27 monedas, y luego de 56 segundos y un cuarto, 36 monedas. Es decir, luego del primer tramo, quedaron 9 monedas; después del segundo, 18. Luego del tercero, 27. Luego del cuarto, 36. La idea es que, después de cada parte del proceso, aumentamos en 9 la cantidad de monedas. Más aún: si uno “detuviera” el reloj en cualquiera de los pasos, en la caja habría un número de monedas que sería un múltiplo de 9. (¿Entiende por qué? Es que en cada paso ponemos 10 y sacamos 1.)

Luego de este razonamiento que acabo de hacer, es esperable que uno tienda a suponer que hay infinitas monedas en la caja cuando termina el proceso. Sin embargo, eso es falso. En realidad, en la caja no quedó ninguna moneda! Veamos por qué. ¿Qué moneda puede haber quedado en la caja? Elija usted un número de moneda cualquiera (claro... como usted no me pudo *comunicar* cuál eligió, voy a elegir yo, pero lo invito a que haga el razonamiento por su cuenta): por ejemplo, la número 3.

¿Pudo haber quedado la número 3 en la caja? ¡No!, porque ésa fue la que su amigo sacó luego del tercer paso.

¿Pudo haber quedado la número 20 dentro de la caja? ¡No!,

tampoco ésta, porque luego del paso número veinte sabemos que esa moneda la sacamos. ¿Podrá ser la número 100? Tampoco, porque luego del centésimo paso, la sacamos a esa también! Entonces, otra vez: ¿qué moneda quedó dentro de la caja? Como se advierte, cualquier moneda que crea que quedó adentro, tendrá que tener un número (digamos el 147.000), pero, justamente, al haber llegado al paso 147.000 seguro que su amigo sacó también esa moneda de la caja.

**MORALEJA:** a pesar de que atenta fuertemente contra la intuición, el hecho de ir sacando las monedas de la forma en la que describí más arriba, garantiza que, cuando pase el minuto, *no quedará ninguna moneda en la caja!*

## Soluciones al problema de las hormigas

Piense conmigo lo siguiente. Supongamos que uno tiene *dos hormigas* nada más. Si las dos caminan en la misma dirección, al final, antes de completar un minuto, se caerán las dos. Así, si alguna de las dos (o las dos) estaba en un extremo del palo y empieza a caminar hacia adentro, tardará exactamente un minuto en caerse. En cualquier otro caso, se caerán *antes del minuto*.

En cambio, si caminan en dirección contraria, en el momento de enfrentarse, como cada una sale para el lado contrario del que venía caminando, uno podría pensar que en realidad es como si fueran transparentes: ise atraviesan como si no existiera la otra! Antes de avanzar con la lectura, convéznase de que entiende lo que termina de leer. De nuevo: cuando dos hormigas chocan, da lo mismo que cada una dé la vuelta y empieza a caminar para el otro lado, que pensar que en realidad se cruzaron, como si la otra no hubiera existido. Esta manera de modelar el problema, es decir, de olvidarse de que arrancan en distintos sentidos, es muy útil, no tanto para cuando uno tiene sólo dos hormigas, sino para cuando uno tiene cien, como en el problema original.

Para contestar entonces la pregunta a), ahora que tenemos la herramienta nueva de que da lo mismo pensar que se cruzan cada vez que se encuentran dos, me parece que es más fácil encontrar la respuesta. (¿No tiene ganas de pensarla solo/a?)

En todo caso, la escribo acá: alcanza con un minuto porque, como todas las hormigas caminan a un metro por minuto, arranquen desde donde arranquen, como ya nada las va a detener y uno puede hacer de cuenta que nunca cambian de dirección porque cruzan de largo, entonces, en un minuto –como máximo– ise caen todas!

Para la parte b) el problema ya no es tan sencillo. ¿Qué es lo que lo hace diferente? Ahora, el *modelo* que hemos inventado para que uno pueda hacer de cuenta que al chocar, en lugar de cambiar de dirección, siguen de largo, tiene dos dificultades. El primer problema son los bordes de la barra. Ahora, las hormigas no se caen. Rebotan y dan vuelta en la otra dirección. Y el segundo problema tiene nombre propio: se llama Alicia. Ahora hay que seguirle el rastro. Ya veremos cómo hacer.

Empecemos con el primer problema: los bordes. Olvidémonos por un momento de Alicia y consideremos sólo una hormiga. Pensemos juntos qué le pasa a una hormiga que empieza a 10 centímetros del extremo izquierdo de la barra horizontal donde está parada, tal como indica la figura.



Supongamos que la hormiga arranca en la dirección de la flecha. En algún momento llega al borde de la derecha. Allí, rebota y da la vuelta. ¿Dónde termina su recorrido? La hormiga termina su caminata en el lugar marcado con 90 cm, porque en el minuto que tiene para caminar avanza un metro, pero como salió en el lugar que dice

10 cm, entonces caminó 90 centímetros hasta llegar al borde, luego dio la vuelta y sólo le alcanzó para volver otros 10 cm. Si hubiera partido de los 20 cm, ¿en dónde terminaría? Bien, caminaría 80 centímetros hasta llegar al borde derecho, y luego le quedarían otros 20 centímetros para caminar en la otra dirección.

MORALEJA: quedaría detenida en el lugar marcado en los 80 cm.



Así, cualquier hormiga que parta del punto  $x$  cm recorre hasta el borde derecho un tramo, luego rebota, y finalmente se detiene al llegar a una distancia  $x$  del borde derecho. O sea, a una distancia  $(1 - x)$ . Por supuesto, lo mismo pasaría si, en lugar de caminar hacia la derecha, caminara hacia la izquierda. En resumen: una hormiga que empieza en la posición  $x$ , no importa si sale para la izquierda o para la derecha, siempre termina su caminata en la posición  $(1 - x)$ . (Haga la prueba: verifique lo que está dicho más arriba. No se someta a lo que está escrito. Pelee contra el argumento hasta entenderlo o demostrar que estoy equivocado).

Volvamos al problema original. Supongamos por un momento que Alicia no está. Cada hormiga que sale a una distancia  $x$  del borde izquierdo, terminará a una distancia  $x$ , pero del borde derecho. Y viceversa. Seguro que, con el modelo que hicimos, no va a ser la misma hormiga. Pero eso no importa. Lo que interesa es que, si había una hormiga a una distancia  $x$  del borde izquierdo, al terminar el minuto habrá una hormiga a una distancia  $x$  del borde derecho.

Ahora hablemos como si pudiéramos identificar a cada hormiga. Si hay una que empieza a la izquierda de otra, esa posición rela-

tiva se va a mantener. No hay manera de que una hormiga le pase por encima a otra. Van a cambiar las posiciones, pero no cuál está a la izquierda de cuál.

Ahora concentrémonos en Alicia. Ella empieza justo en la mitad, en el punto  $(1/2)$ . Está claro que, al finalizar el minuto, habrá una hormiga en la mitad. Pero ¿qué tiene que pasar para que sea Alicia?

Cuando empieza el proceso, Alicia tiene, digamos, 20 hormigas a la izquierda y 80 a su derecha. Al cabo del minuto, habrá una hormiga en la mitad –no necesariamente Alicia– que tendrá 80 hormigas a su izquierda y 20 a su derecha, guardando las posiciones relativas que tenían al principio. En general, si Alicia empezó con  $n$  hormigas a su izquierda y  $(100 - n)$  a su derecha, al finalizar el minuto habrá una hormiga en la mitad que tendrá  $(100 - n)$  a su izquierda y  $n$  a su derecha.

Para finalizar, lo que tiene que pasar para que Alicia sea la que quede en el medio otra vez, es que la cantidad que tenía a la izquierda y a la derecha sean la misma. O sea que

$$n = (100 - n)$$

Y esto sucede, si  $n = 50$ .

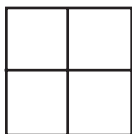
Lo notable de este resultado es que no importa en qué lugar estaban las 50 hormigas que están a la derecha y a la izquierda de Alicia. Basta con que la cantidad sea 50 de cada lado para que Alicia termine en el lugar en el que empezó. Esto contesta las preguntas b) y c).

MORALEJA: aunque usted no lo crea, esto también es hacer matemática. Y hacer modelos para poder pensar problemas es no sólo hacer matemática, sino matemática fina. De eso se trata: de disfrutar de pensar.

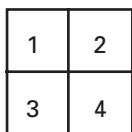


### Solución al problema de las dos preguntas (en una)

Empecemos con un tablero de  $1 \times 1$ . En este caso, hay *un solo cuadrado posible*. Si tuviéramos un tablero de  $2 \times 2$ , entonces debemos considerar dos tipos de cuadraditos posibles: los de  $2 \times 2$  y los de  $1 \times 1$ .



Como *todo* el tablero es de  $2 \times 2$ , hay un único cuadrado de ese tamaño. Pero de  $1 \times 1$  hay cuatro (numerados como se ve en la figura).

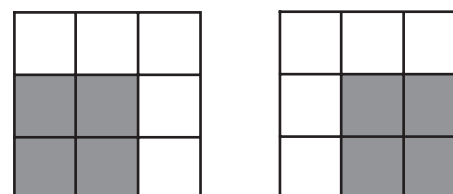
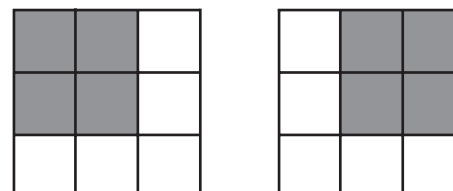


Ahora, si uno tiene un tablero de  $3 \times 3$  hay más cuadraditos a considerar. Están los de  $1 \times 1$ , los de  $2 \times 2$ , y el de  $3 \times 3$ .

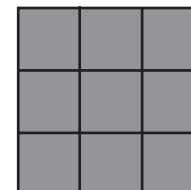
De  $1 \times 1$  hay 9 (o sea,  $3^2$ ).



De  $2 \times 2$  hay 4 (o sea,  $2^2$ ).



De  $3 \times 3$  hay 1 (o sea,  $1^2$ ).



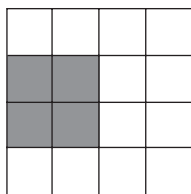
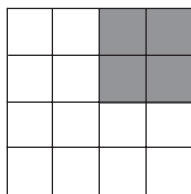
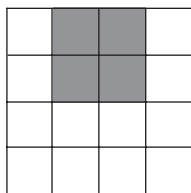
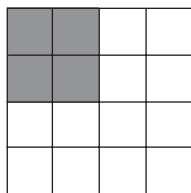
Lo invito a que siga solo, hasta poder *conjeturar* una ley un poco más general. Hago yo un par de pasos más.

Si fuera un tablero de  $4 \times 4$ , entonces hay:

De  $1 \times 1$  hay 16 (o sea,  $4^2$ ).

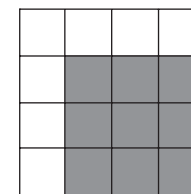
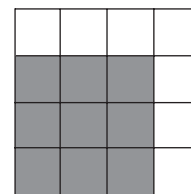
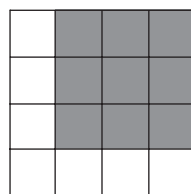
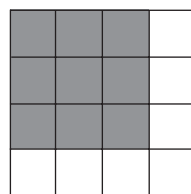
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

De 2 x 2 hay 9 (o sea,  $3^2$ ).



Etcétera.

De 3 x 3 hay 4 (o sea,  $2^2$ ).



De 4 x 4 hay 1 (o sea,  $1^2$ ).

El último (que sirve para contestar la primera pregunta): en un tablero de 8 x 8, hay:

De 1 x 1	hay	64 (o sea, $8^2$ )
De 2 x 2	hay	49 (o sea, $7^2$ )
De 3 x 3	hay	36 (o sea, $6^2$ )
De 4 x 4	hay	25 (o sea, $5^2$ )
De 5 x 5	hay	16 (o sea, $4^2$ )
De 6 x 6	hay	9 (o sea, $3^2$ )
De 7 x 7	hay	4 (o sea, $2^2$ )
De 8 x 8	hay	1 (o sea, $1^2$ )

En este caso, entonces, hay en total 204 cuadrados (basta con sumar  $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$ ).

El objetivo de este problema es mostrar cómo, con casos particulares, se puede conjeturar una *ley general*. Es decir, si uno tuviera un tablero de  $n \times n$  cuadraditos, y le preguntaran cuántos cuadrados se pueden formar, la respuesta es:

De 1 x 1	hay	$(n^2)$
De 2 x 2	hay	$(n - 1)^2$
De 3 x 3	hay	$(n - 2)^2$
De 4 x 4	hay	$(n - 3)^2$
.....		
De $(n - 2) \times (n - 2)$	hay	$3^2$
De $(n - 1) \times (n - 1)$	hay	$2^2$ , y

De  $n \times n$  hay  $1^2 = 1$

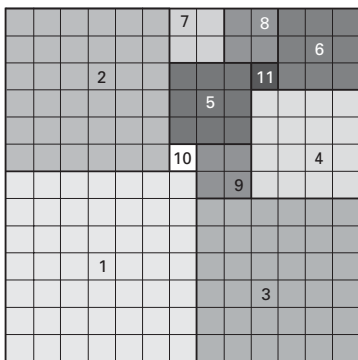
En todo caso, lo que queda pendiente es *saber* hacer la siguiente cuenta:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = \frac{\{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)\}}{6}$$

No es fácil *conjeturarla* sin ayuda, por eso incluyo el resultado y sugiero que quienes lean esta fórmula me ayuden a pensar cómo se puede *deducir o inferir geoméricamente*.

### Solución al problema del acolchado cuadrado

En el libro *Amusements in Mathematics*, Dudeney escribió que él creía que ésta es la única solución al problema, o sea, que la menor cantidad de cuadraditos posibles es de 11. Los cuadrados más grandes tienen que tener esas medidas, y ubicados de esa forma. Por supuesto, se podrían encontrar *otras* ubicaciones, pero sólo *reflejarían* lo que se ve en esta figura. El problema de Dudeney se puede generalizar de varias maneras. Una de ellas (la más interesante, creo) es la de considerar cuadrados de distintas dimensiones ( $n \times n$ , para cualquier  $n$ ) y tratar de hacer lo mismo que en el caso anterior (13 x 13).



Los casos más conocidos son:

n	
1	1
2	4
3	6
4	7
5	8
6	9
7	9
8	10
9	10
10	11
11	11
12	11
13	11
14	12

en donde la columna de la izquierda indica el número de cuadrados por lado, y la de la derecha, el número de *cuadraditos* en los que se puede descomponer el cuadrado grande.

### Solución al problema del ramo de rosas

A los efectos de facilitar la lectura, voy a abreviar los nombres de las rosas. A las rosas *rojas* las voy a llamar con la letra *R*. A las rosas *blancas*, con la letra *B*, y a las rosas *azules*, con la letra *A*.<sup>33</sup>

Con todo, quiero pedirle un favor al lector o lectora: ¡no abandone ahora! Acompáñeme en el razonamiento. Créame que se va a entretener pensando. No deje que lo intimide la forma como se presentan los datos más abajo. Es sólo una manera abreviada de poder

<sup>33</sup> En realidad, estoy usando la letra *R* para hacer referencia al *número* de rosas Rojas que hay, la letra *B* para remitir al *número* de rosas Blancas que hay y lo mismo con el *número* de rosas Azules, para el que uso la letra *A*.

escribirlos, como si usted se anotara algo en una libreta de apuntes, y pusiera sólo las iniciales porque le ahorra energía y no le hace falta escribir *todas* las veces lo mismo.

Ahora sí, podemos reescribir los datos que tenemos y que aparecen en página 49.

- a)  $R + B = 100$
- b)  $B + A = 53$
- c)  $A + R < 53$  (donde  $<$  significa *menor que*)

Se sabe además que,

- d) *hay por lo menos dos rosas de cada color*

Llamemos  $x$  a la suma de las azules más las rojas. O sea,

- e)  $A + R = x$

Por lo tanto, fíjese que, de lo que dicen c) y e) se deduce que

- f)  $x < 53$

Tome ahora los datos que aparecen en a), b) y e).

$$\begin{aligned} R + B &= 100 \\ B + A &= 53 \\ A + R &= x \end{aligned}$$

Si sumamos lo que está a la izquierda, *tiene que resultar igual* a lo que está a la derecha. O sea:

$$g) \quad 2R + 2B + 2A = 153 + x$$

Luego, como el término de la izquierda es múltiplo de dos (fíjese que es la suma de tres números pares), entonces el de la dere-

cha también tiene que ser un número par. Como 153 no es un número par, la única alternativa que queda es que  $ix$  sea impar también! Es que, como 153 es impar, la única manera de que al sumarle otro número la suma resulte par, es que ese número (en este caso  $x$ ) sea impar también.

Luego, acabamos de llegar a una nueva conclusión:

- h)  $x$  es *impar*.

Ahora, *sumemos* los datos que aparecen en b) y e).

Se tiene:

$$\begin{aligned} (A + B) + (A + R) &= 53 + x \\ 2A + B + R &= 53 + x \\ 2A + (B + R) &= 53 + x \end{aligned}$$

y usando el dato a), sabemos que  $(B+R) = 100$ .

Luego,

$$2A + 100 = 53 + x$$

*Despejando* (o sea, pasando el número 53 del lado izquierdo), se tiene:

$$2A + (100 - 53) = x$$

- i)  $2A + 47 = x$

Y este último es un dato muy interesante. Quiero recordar acá lo que decían los datos f) y h):

- j)  $x < 53$

- k)  $x$  es *impar*.

Luego, si uno *mira* el dato i), como sabe por h) que  $x$  *tiene* que ser impar, y por f) que tiene que ser *menor* que 53... las únicas alternativas que le quedan a  $x$  son, o bien

$$x = 49$$

o bien

$$x = 51$$

(Esto sucede porque, por el dato que figura en i),  $x$  tiene que ser mayor que 47, ya que A es mayor que cero, porque sabemos que hay –al menos– dos rosas de cada color, y por lo tanto A no puede ser cero). Pero, por otro lado, como  $x$  tiene que ser *menor* que 53, entonces: o bien es 49 o bien es 51).

Y éste es el paso final, para que  $x = 49$ , el dato que figura en i) obligaría a que  $A = 1$ , pero esto es imposible, porque en el planteo el problema decía que de cada color había por lo menos *dos* rosas.

Luego, la conclusión es que  $x = 51$ , y por lo tanto,

$$A = 2$$

Y esto acaba de resolver el problema. Sabiendo que  $A = 2$ , entonces, del dato que figura en b) se deduce que  $B = 51$ , y sabiendo que  $B = 51$ , entonces, de a) uno desprende que  $R = 49$ .

Resumiendo:

$$A = 2$$

$$B = 51$$

$$R = 49$$

### Solución al problema del reproductor de CD

Uno puede pensar que cada canción en el CD tiene un número (con el que fue grabada y que figura en la “solapa”) y por lo tanto,

se trataba de buscar “todos los posibles órdenes” de reproducir las canciones.

Lo que acabamos de ver es que, con el mismo “modelo”, las distintas “formas” de escuchar las canciones son en total: 3.628.800, lo que significa que tardará 3.628.800 días hasta volver a escucharlas de nuevo en alguno de los órdenes previos. Lo que implica (dividiendo este número por 365, para calcular cuántos años tienen que pasar) que uno tendrá que esperar más de 9.941 años! para volver al orden inicial.

Más allá de las cuentas, lo interesante es el “modelo” que sirve para “contar” todos los posibles casos, sin tener que hacer una “lista” de todos los posibles resultados. Haber pensado este problema permite resolver muchísimos otros de características parecidas.

Un par de observaciones finales:

a) La rama de la matemática que se dedica a “contar” (sin tener que “listar”) se llama “combinatoria”. Los problemas de combinatoria son preciosos y no necesariamente muy sencillos. Hay gente que tiene mucha facilidad para “imaginar” formas de “contar” que son verdaderamente ingeniosas.

b) Tomar un número cualquiera, digamos el 4, y hacer el siguiente cálculo:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

se escribe 4!, y se lee “4 factorial” o “el factorial de 4”.

$$\text{Hacer } 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

De hecho, el resultado del problema planteado (o sea, de las posibles formas de escuchar las 10 canciones) es 10!, o sea, el factorial de diez.

A manera de ejemplo, que sugiere cuán “grande” se hace el “factorial de un número” aun para números pequeños, fíjese en esta lista:

$$2! = 2 \text{ (factorial de 2, es igual a 2)}$$

$$4! = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ (factorial de 4, es igual a 24)}$$

$$5! = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ (factorial de 5, es igual a 120)}$$

$$7! = 5040 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ (factorial de 7, es igual a 5.040)}$$

$$10! = 3.628.800 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$15! = 1.307.674.368.000$$

Una reflexión sobre este último número 15!: fíjese que, si uno tuviera 15 libros en un estante de una biblioteca y se preguntara de cuántas formas los puede ordenar (una pregunta “inocente” si se quiere), tendrá como respuesta “más de un billón de posibilidades”.

Y por último, si uno calcula:

$$20! = 2.432.902.008.176.640.000$$

descubre que ésta sería la respuesta al planteo de en cuántas maneras pueden terminar ubicados los 20 equipos de fútbol que participan en el torneo de la AFA: más de “¡2 trillones!”. ¡Y aun así ganó Estudiantes, o San Lorenzo!

Lo que hemos descubierto, también, es que el “factorial” de un número es un número “grande” y además, si uno aumenta el número, crece muy rápido. Por eso, tratar de encontrar “todos los posibles órdenes” para escuchar las canciones resulta en tener que esperar que pasen 10! días, o sea, más de 9.941 años hasta tener que repetir un orden de los que aparecieron antes.

## Solución al desafío

Tomemos cualquier subconjunto de 10 números entre los primeros 100, como dice el planteo.

Una observación: cualquiera que sea la forma en la que elijamos este conjunto de 10 números, ¿cuál podría ser la mayor de las posibles *sumas* que podemos obtener?

Es decir, en el peor de los casos, si hubiéramos elegido los números

$$\{91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$$

la suma de estos 10 números no llega a 1.000!

Y como éstos son los números más grandes que se pueden elegir, eso significa que cualquiera sea el conjunto de 10 números que elijamos entre los primeros 100 naturales, las sumas de cualquier subconjunto de estos diez números siempre son menores que 1.000. Éste es un dato no menor, y se verá inmediatamente la importancia que adquiere.

Ya sabemos que hay 1.023 subconjuntos que podemos construir. Basta confrontar con el capítulo “Luces encendidas, luces apagadas y modelos” del episodio 2 de *Matemática... ¿Estás ahí?* (pp. 89-94). Allí está explicado cómo hacer para encontrar todos los subconjuntos de un conjunto de  $n$  elementos.

Y si sumamos los elementos de cada uno de estos subconjuntos, obtenemos 1.023 números. Claramente, esas *sumas* no pueden superar al número 1.000, entonces, esos 1.023 números *no pueden ser todos distintos*: ¡tienen que repetirse! (Lo invito acá a leer el capítulo “Problema del palomar” o “Pigeon Hole”, en el libro *Matemática... ¿Estás ahí?*, pp. 134-135.)

MORALEJA: hay *dos* subconjuntos (por lo menos) que uno puede construir con los números de  $A$ , de manera tal que al sumar los elementos de cada uno de ellos, dan lo mismo, a pesar de ser distintos conjuntos. Si esos dos conjuntos, que suman lo mismo, *tienen elementos en común* (o sea, números que aparecen en los dos conjuntos), los sacamos, y nos quedamos con los otros. Como la suma de ambos daba lo mismo, al sacar los repetidos, disminuimos el total de cada conjunto en la misma cantidad (por lo que las sumas siguen siendo iguales entre sí), ¡pero ahora no hay más repeticiones! Y listo: esto termina de resolver el problema. Eso sí: esta solución demuestra que estos dos subconjuntos tienen que existir, pero no los encuentra ni dice cómo hacerlo. Si a uno le interesa encontrarlos, sabe que el intento vale la pena porque existen.

### Solución al problema de la niña que no sabía jugar al ajedrez

Violeta juega contra Alberto en el tablero 1 con las piezas negras. En cambio, contra Marcelo, en el tablero 2, juega con piezas blancas.

Además, se sabe que ambas partidas son simultáneas.

Violeta comienza así: espera que Alberto realice la primera movida (así tiene que ser porque Alberto juega con las blancas), y no bien lo hace, Violeta realiza *la misma movida* en el tablero 2 (donde es ella la que juega con las blancas y empieza la partida). (Intuyo que a esta altura ya descubrió cuál va a hacer la respuesta, ¿me equivoco?)

Antes de contestar en el tablero 1, Violeta espera la respuesta en el tablero 2, que está obligado a hacer Marcelo, que juega con las negras. No bien Marcelo hace su movida, Violeta la reproduce en el tablero 1, en la partida con Alberto. Y así sigue todo el tiempo. A cada movida de las piezas blancas que efectúa Alberto, ella la va reproduciendo en el tablero 2 con Marcelo, y las respuestas de éste en el tablero 2, las reproduce en el tablero 1 con Alberto.

¿Qué va a pasar? Si empata una partida, también empatará la otra, y si Alberto le gana la partida, implica que ella le ganará a Marcelo; y por supuesto, también vale la recíproca. Es decir, si es Marcelo quien gana su partida contra Violeta, entonces ella le ganará a Alberto.<sup>34</sup>

En cualquier caso, lo seguro es que Violeta no va a perder las dos partidas, como le sucedió a su padre. Y eso, acá, es lo que importa.

### Solución al problema de la estrategia para ganar siempre

Se conoce una estrategia ganadora para el segundo jugador. Para eso, tiene que seguir el siguiente plan:

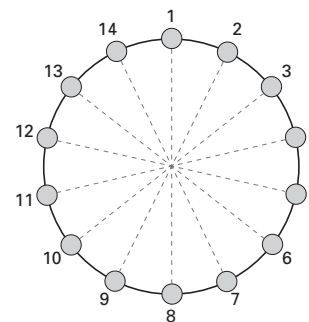
<sup>34</sup> A quienes juegan bien al ajedrez, les pido la generosidad de comprender que se trata de un ejemplo que invita a pensar en una solución al problema planteado, y no pretendo dar una *regla* de qué hacer en cualquier partida.

- a) Una vez que el primer jugador retiró una o dos monedas, quedará formado –inexorablemente– un cierto espacio vacío en la circunferencia en donde están distribuidas las monedas. El plan consiste en que el segundo jugador elija una o dos monedas (tantas como eligió el primero) en forma diagonal a donde quedó el espacio libre. Es decir, que retire las monedas que estaban exactamente opuestas a las que retiró el primer jugador.

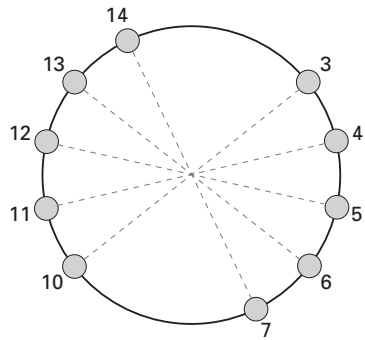
Antes de seguir con la segunda parte del plan, advierta que, al ejecutar este paso, las monedas que había inicialmente distribuidas en el círculo quedaron divididas ahora en dos grupos iguales. ¿No le dan ganas de pensar cómo hacer para completar la estrategia ganadora? Por las dudas, siga abajo.

- b) Ahora le vuelve a tocar el turno al jugador que empezó el juego. Pero claro, cualquier movimiento que él haga, al sacar o bien una o bien dos monedas, podrá ser replicado (o sea, “hacer lo mismo”) por el segundo jugador. ¡Y eso le garantiza el triunfo!

Este ejemplo sencillo de estrategia frente a un problema entre dos competidores muestra cómo la matemática también interviene. De hecho, la simetría que se autogenera el segundo jugador, es lo que le permite ganar siempre. Para completar el juego, realicemos un ejemplo. Supongamos que se tienen 14 monedas, como se ve en la figura. Éstas son las jugadas de cada uno:

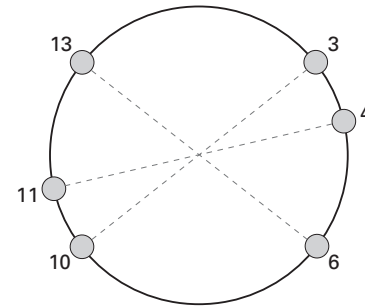
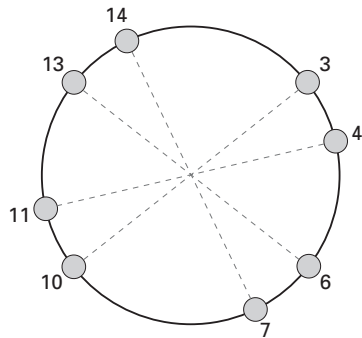


Jugador 1	Jugador 2
1,2	8,9
5	12
7	14
3,4	10,11
6	13



Luego de las dos primeras jugadas.

Después de las cuatro primeras jugadas.



Luego de seis jugadas.

¡Y gana el segundo jugador!  
Éste es sólo un ejemplo. Lo invito a que se plantee los suyos y decida qué hacer en cada caso.

### Solución al problema del partido de tenis

Se jugaron 9 *games*. Pueden suceder dos cosas: o bien sacó primero Miranda (a quien voy a llamar M a partir de ahora), en cuyo caso ésta sería la distribución:

M R M R M R M R M

o bien sacó primero Rosemary (a quien llamaré R), produciéndose el siguiente esquema:

R M R M R M R M R

En el primer caso, Miranda sacó 5 veces y Rosemary, 4. En el segundo, al revés: Rosemary sacó 5 y Miranda, 4.

Consideremos el primer caso (o sea, Miranda sacó primero, lo que obliga a que haya sacado 5 veces, y Rosemary sacó 4). Vamos a analizar las posibles alternativas, de acuerdo con la cantidad de veces que ganó M con su saque.



- a) Supongamos que M ganó las 5 veces que sacó. ¿Es posible esto? La respuesta es... *no*. Pero ¿por qué? La respuesta es: si M ganó con su saque las 5 veces, entonces R no le pudo quebrar el saque nunca. La única alternativa, en consecuencia, es que M le haya quebrado el saque a R en 5 oportunidades, pero esto es imposible porque R sólo sacó 4 veces. Luego, descartamos esta posibilidad.
- b) Supongamos ahora que M ganó 4 de las 5 veces que sacó. Esto implica que R le quebró el saque una vez. Pero entonces, para poder llegar a que se quebraran el saque 5 veces en total, esto significa que M le tuvo que haber quebrado el saque a R en 4 oportunidades. Pero si esto fuera así, M tendría 8 puntos (4 con su saque, y otros 4 con el saque de R). Imposible. Luego, descartamos esta posibilidad también.
- c) Supongamos ahora que M ganó 3 de las 5 veces que sacó. Esto significa que R quebró el saque de M en 2 oportunidades. Para poder llegar a las 5 veces que se quebraron en total, M tuvo que haberle quebrado el saque a R *3 veces*. Y ahora se da la circunstancia de que M tendría 6 puntos, los *queiebres* serían 5 (2 en los que R le quebró el saque a M, y 3 en los que M le quebró el saque a R), por lo que la cuenta da perfectamente. *Esta es una posibilidad concreta*: M ganó 3 veces con su saque. R ganó 1 sola vez con su saque (perdió en las otras 3), y como M ganó sólo 3 veces de las 5; esto significa que R le ganó en las otras 2 oportunidades. Ésta es la situación que nos planteaba el problema, y se dio cuando M sacó primero.
- d) ¿Podrá darse el caso en que M haya ganado sólo 2 veces con su saque? Si esto fuera así, R habría quebrado el saque de M en 3 oportunidades. Pero para poder llegar a tener 6 puntos, M debió ganar 4 veces, cuando quien sacaba era R. Sólo que entonces se habrían producido 4 más 3 queiebres en total, y

- esto contradice las hipótesis del problema. Luego, hay que descartar este caso también.
- e) Si suponemos que M ganó una sola vez con su saque, esto implica que R le quebró el saque en las otras 4 oportunidades, pero esto contradice la hipótesis de que R sólo consiguió 3 puntos en total. Luego, hay que descartar también.
- f) Si M no ganó nunca con su saque, esto implica que tendría que haber ganado siempre con el saque de R, lo cual significa que M tiene sólo 4 puntos, y no pudo llegar nunca a los 6 que plantea el enunciado. Hay que descartarlo también.

COROLARIO: sólo la situación c) es la que cumple con todas las hipótesis.

Análisis del segundo caso, en que R es quien saca ahora 5 veces, y M, sólo 4. Veamos si pueden darse algunas de las posibilidades que analizamos antes. Obviamente, R no puede ganar más que 3 veces con su saque, porque en total tiene 3 puntos.

- a) Supongamos, entonces, que R ganó 3 veces con su saque. Luego M le quebró el saque 2 veces. Como R no pudo ganar más puntos, M tuvo que haber ganado todos los puntos con su saque, y esto es imposible, porque entonces, si bien es verdad que M tendría los 6 puntos que indica la hipótesis, no se habrían producido los 5 queiebres de saque que indica el problema. Moraleja, hay que descartar esta opción.
- b) Supongamos que R ganó 2 veces con su saque. Entonces, M tiene que haberle quebrado el saque en 3 oportunidades. Queda por saber qué pasó con los puntos en los que sacó M (que son 4). Para que R junte los 3 puntos que le hacen falta, tiene que haberle quebrado el saque a M una sola vez. Pero esto implica que M ganó 3 de los 4 puntos. Entonces, lo que

falla es la cantidad de veces que se produjeron los quiebres de saque: M quebró 3 veces y R quebró 1 vez. La suma no da 5. Luego, hay que descartar esta posibilidad también.

- c) Supongamos ahora que R ganó 1 vez con su saque. Entonces, M le quebró 4 veces el saque. Para que en total haya 5 quiebres, significa que R está obligada a haber quebrado el saque de M una sola vez más. Pero entonces, R tiene en total 2 puntos y no 3 como debería ser. También hay que descartar esta posibilidad.
- d) La última alternativa para considerar es que R no haya ganado nunca con su saque. Pero esto implicaría que M le tiene que haber quebrado el saque siempre, o sea, las 5 veces que sacó R. En ese caso, R, para poder juntar sus 3 puntos, tendría que haberle quebrado el saque a M 3 veces. Y eso es imposible, porque la cantidad de veces que se quebraron el saque entre las dos es 5. Luego, las hipótesis no se cumplen. Moraleja: hay que descartar esta posibilidad.

MORALEJA FINAL: la única manera en que se cumple lo pedido es la posibilidad c) del primer caso, cuando quien saca es M, y lo que tiene que haber sucedido es que haya ganado 3 de las 5 veces que sacó (lo que implica que R haya quebrado 2 veces), y que M le haya quebrado el saque a R 3 veces, con lo que se cumple todo: M ganó 6 puntos, R ganó 3 puntos, y entre ambas se quebraron el saque en 5 oportunidades.

Como no importa el orden en que se produjeron los quiebres, uno puede suponer que los resultados parciales fueron:

- 0-1 (quiebre de Rosemary a Miranda)
- 0-2 (gana Rosemary con su saque)
- 0-3 (nuevo quiebre de Rosemary a Miranda)
- 1-3 (quiebre de Miranda a Rosemary)
- 2-3 (gana Miranda con su saque)

- 3-3 (quiebre de Miranda a Rosemary)
- 4-3 (gana Miranda con su saque)
- 5-3 (quiebre de Miranda a Rosemary)
- 6-3 (gana Miranda con su saque)

Esto termina por resolver el problema en forma exhaustiva, ya que analicé todas las posibilidades. Muchas veces, cuando el número de casos no es descomunalmente grande, hacer un estudio minucioso (o sea, agotando todas las alternativas) permite sacar una conclusión terminante. La solución que encontramos es la única posible.

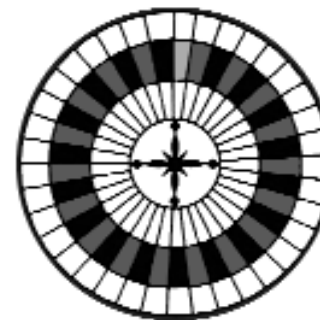
¿Habrá alguna respuesta más sencilla a este problema? A mí no se me ocurrió... pero, obviamente, eso no significa nada. Quizás usted encontró una solución más elegante y más breve. Ojalá.

### Demostración de las ternas consecutivas en una ruleta

Vamos a probar que no es posible distribuir los números del 1 al 36 en una ruleta sin que haya tres consecutivos que sumen 55 o más.

Supongamos que se pudiera. Distribuimos los números entonces y los llamamos:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{36}$



Vamos a suponer entonces que la suma de tres de esos números consecutivos siempre resulta estrictamente menor que 55, es decir:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &< 55 \\x_2 + x_3 + x_4 &< 55 \\x_3 + x_4 + x_5 &< 55 \\x_4 + x_5 + x_6 &< 55 \\&\dots\dots \\x_{35} + x_{36} + x_1 &< 55 \\x_{36} + x_1 + x_2 &< 55\end{aligned}\quad (1)$$

Hay entonces 36 ternas. Cada número aparece 3 veces. Luego, si sumamos todo lo que aparece en las desigualdades (\*), se tiene:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{35} + x_{36}) + (x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{36} + x_1) + (x_3 + x_4 + \\x_5 + \dots + x_1 + x_2) \\< 36 \cdot 55 = 1.980\end{aligned}\quad (2)$$

Luego, cada número aparece 3 veces. O sea, se tiene:

$$3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{35} + x_{36}) < 1.980 \quad (3)$$

Pero, en realidad, los números

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{36}\}$$

son ni más ni menos que los números

$$\{1, 2, 3, \dots, 35, 36\}$$

Luego, la desigualdad (3), se convierte en:

$$\begin{aligned}3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 34 + 35 + 36) = \\3 \cdot (36 \cdot 37) / 2\end{aligned}\quad (4)$$

(donde hemos usado que la suma de los primeros 36 números naturales es  $(36 \times 37) / 2$ ). Pero

$$3 \cdot (36 \cdot 37) / 2 = 3 \cdot 666 = 1998 \quad (5)$$

Luego, de las fórmulas (2), (3), (4) y (5), se llega a una contradicción, porque aparecería que

$$1998 < 1980$$

Entonces, suponer que es posible hacer una distribución de los primeros 36 números en una ruleta y que ninguna terna sume 55 o más, lleva a una contradicción.

MORALEJA: no importa qué distribución se haga de los números, siempre habrá al menos una serie de tres números consecutivos cuya suma es 55 o más.

### Texto de Niñas en la playa

CIERTO DIA DE VERANO ESTABA EN LA PLAYA OBSERVANDO DOS CHICAS BRINCANDO EN LA ARENA, ESTABAN TRABAJANDO MUCHO, CONSTRUYENDO UN CASTILLO DE ARENA CON TORRES, PASADIZOS OCULTOS Y PUENTES. CUANDO ESTABAN ACABANDO VINO UNA OLA QUE DESTRUYO TODO REDUCIENDO EL CASTILLO A UN MONTON DE ARENA Y ESPUMA. PENSE QUE DESPUES DE TANTO ESFUERZO LAS CHICAS COMENZARIAN A LLORAR, PERO EN VEZ DE ESO, CORRIERON POR LA PLAYA RIENDO Y JUGANDO Y COMENZARON A CONSTRUIR OTRO CASTILLO.

COMPRENDI QUE HABIA APRENDIDO UNA GRAN LECCION; ESTAMOS MUCHO TIEMPO DE NUESTRAS VIDAS CONSTRUYENDO ALGUNA COSA PERO CUANDO MAS TARDE UNA OLA LLEGA Y DESTRUYE TODO, SOLO

PERMANECE LA AMISTAD, EL AMOR Y EL CARINO, Y LAS MANOS DE AQUELLOS QUE SON CAPACES DE HACERNOS SONREIR.

SALUDOS Y BESOS.

### Solución a la paradoja de Bertrand Russell

Voy a mostrar que las leyes que escribí son contradictorias.

Tomemos *todos los perros blancos*. Éste es, claramente, un conjunto de perros de Plutón. Como tal, tiene que corresponder a la lista de un *único perro* de Plutón, que voy a llamar Fido. Es decir: la lista de perros de Fido coincide *exactamente* con todos los perros *blancos* de Plutón. Y como esa lista tiene que cumplir las reglas, *no hay ningún otro perro* de Plutón que pueda tener la misma lista.

La pregunta que surge ahora es: Fido, ¿de qué color es? (Aquí, si yo fuera usted, volvería a pensar sola/o).

Veamos.

- ¿Puede ser blanco Fido? Si fuera blanco, tendría que estar en su propia lista (porque acabamos de decir que la lista de perros que puede olfatear Fido, son todos los perros blancos. Si él fuera blanco, tendría que figurar en su propia lista). Pero, si revisamos la ley, en el punto 6, vemos que los perros blancos eran justamente aquellos que no figuraban en sus propias listas. Moraleja: Fido no puede ser blanco, porque, si no, contradiría las reglas.
- Uno debe concluir, entonces, que Fido tiene que ser negro. Pero, si así fuera, tendría que poder olfatearse a sí mismo (véase la regla 5). O sea, tendría que figurar en su propia lista. Y esto no puede ser tampoco, porque la lista de Fido estaba compuesta justamente por todos los perros blancos. Entonces, si Fido fuera negro, no podría figurar en su propia lista.

Esta paradoja es una versión más de las célebres paradojas de Bertrand Russell. Más allá del ejemplo de Fido, los perros blancos, negros y Plutón, lo valioso de pensar en este tipo de cosas es entrenar el cerebro para recorrer caminos que no son habituales. En todo caso, creo que sirve para tomar decisiones más “educadas” en la vida cotidiana.<sup>35</sup>

### Solución a la paradoja de Allais

Voy a hacer un diagrama que intenta resumir las cuatro opciones.

	1 a 33	34	35 a 100	Preferencia
A	2.500	0	2.400	18%
B	2.400	2.400	2.400	82%
C	2.500	0	0	83%
D	2.400	2.400	0	17%

Al revisar las preferencias de nuestros semejantes, uno advierte que entre A y B, la mayoría *abrumadora* se inclinó por B. La gente prefiere sacrificar los 100 pesos de más que podría cobrar si salieran los primeros 33 números, para no arriesgarse a no cobrar nada si sale el 34. Digo esto porque, del 35 en adelante, las opciones son iguales.

Pero lo llamativo es que, si uno modifica las opciones de tal forma que, si salen los números del 35 en adelante, y en cualquiera de los dos casos nadie cobra nada, la gente cambia increíblemente hacia el otro lado, y opta por la alternativa C en lugar de la D. Pareciera que la posibilidad de perder todo si sale el 34, que tan importante pareció ser en el primer caso, pierde relevancia frente a los 100 pesos de más que se cobrarían si saliera cualquiera de los treinta y tres primeros números.

<sup>35</sup> Para aquellos que han leído un poco más sobre cardinalidad y conjuntos infinitos, en realidad hay ya una contradicción anterior, y es que se sabe que el cardinal de partes es estrictamente mayor que el cardinal del conjunto. El conjunto de *todos los posibles subconjuntos de perros de Plutón* es mayor que el *conjunto de perros*. Por lo tanto, hay muchas más listas posibles de perros que perros para llevarlas colgadas. Y ese problema en el planteo ya no se puede salvar.

Lo interesante de esta variación en lo que elige la sociedad es que la diferencia que hay entre las opciones A y B, con respecto a la diferencia que hay entre las opciones C y D, es en esencia la misma. Y lo invito a pensar en esto. Tanto A como B ofrecen el mismo premio si salen los números del 35 en adelante. Y de la misma forma, tanto C como D ofrecen el mismo premio si salen números del 35 en adelante. Claro que, en el primer caso, ofrecían un premio de 2.400 pesos, en tanto que en los casos C y D, no ofrecen nada.

En realidad, si uno quisiera hilar más fino, lo notable es que en los dos últimos casos uno podría suponer que la ruleta pasó a tener *solamente* 34 números. Si salieran del 1 al 33, la opción C ofrece 100 pesos más que la D, y esta última es la que paga los 2.400 pesos si sale el 34, mientras que la C no paga nada.

Llama la atención el cambio abrupto y tan marcado que se produce en la elección de la gente (del 17% al 82%) por el simple hecho de que ahora ninguna de las dos opciones paga nada si salen los números del 35 en adelante. De ahí el nombre de *Paradoja de Allais*.

Mientras tanto, usted, ¿qué había elegido? ¿En qué categoría entró?

### Solución a la paradoja de las papas

Para facilitar las cuentas, llamemos  $P$  a los kilos que se perdieron luego de un día de deshidratación. Entonces, al finalizar el día, las papas pesan:

$$(100 - P) \text{ kilos}$$

Por otro lado, el agua que había antes de deshidratarlas era exactamente:

$$(99\%) \cdot 100 \text{ kilos} \quad (*)$$

mientras que el *agua* que queda, luego del proceso, es:

$$(98\%) \cdot (100 - P) \text{ kilos.} \quad (**)$$

¿Por qué? Bien, porque las papas pesaban 100 kilos, pero después de la deshidratación a la que fueron sometidas pesan  $(100 - P)$  kilos, y de ese peso ahora sabemos que el 98% es agua. Si juntamos los datos que figuran en (\*) y (\*\*) para calcular el peso perdido  $P$  (que tiene que estar compuesto sólo por agua), lo que hago es restar el agua que había antes menos el agua que quedó. Esto es:

$$(99\%) \cdot 100 - (98\%) \cdot [100 - P] = P \quad (***)$$

(Antes de seguir, lo invito a que relea esta última igualdad y la entienda antes de avanzar.)

Lo que dice es que el peso  $P$  del agua que se perdió se obtiene restando el agua que había antes de deshidratar las papas, menos el agua que quedó después. Ahora sí, sigo con la ecuación (\*\*\*):

$$\begin{aligned} P &= (0,99) \cdot 100 - (0,98) \cdot [100 - P] \\ &= (0,99) \cdot 100 - (0,98) \cdot 100 + (0,98) \cdot P \\ &\text{(recuerde que "menos por menos es más")} \\ &= (0,01) \cdot 100 + (0,98) \cdot P \\ &= (1 / 100) \cdot 100 + (98 / 100) \cdot P \end{aligned}$$

Luego, si paso restando el término  $[(98 / 100) \cdot P]$  al primer miembro, se tiene:

$$P - [(98 / 100) \cdot P] = (1 / 100) \cdot 100 = 1$$

Ahora, uso que  $P = (100 / 100) \cdot P$ :

$$\begin{aligned} (2 / 100) \cdot P &= 1 \\ P &= (100 / 2) = 50 \end{aligned}$$

Lo increíble que acabamos de descubrir es que el peso que perdieron las papas es de ¡50 kilos! Por lo tanto, ahora las papas *pesan* 50 kilos (ya que originariamente pesaban 100).

En resumen:

Peso inicial de las papas	100 kilos
Peso inicial del agua	99% de los 100 kilos = 99 kilos
Peso de las papas luego de la deshidratación	100 - P (donde P es el peso del agua perdida en la deshidratación)
Peso del agua luego de la deshidratación	98% · (100 - P)
Peso del agua <i>perdida</i> en la deshidratación	(99% · 100) - 98% · (100 - P)

Luego, lo que queremos es *calcular* justamente el peso del agua *perdida* en la deshidratación (que hemos llamado P). Si uno mira en la última fila, la segunda columna, se tiene:

$$99\% \cdot 100 - 98\% \cdot (100 - P) = P \text{ (porque ese peso P es el que queremos calcular)}$$

$$(99 / 100) \cdot 100 - (98 / 100) \cdot (100 - P) = P$$

$$99 - 98 + (98 / 100) \cdot P = P$$

$$1 + (98 / 100) \cdot P = P$$

$$1 = P - (98 / 100) \cdot P$$

$$1 = (2 / 100) \cdot P$$

$$100 / 2 = P$$

$$50 = P$$

MORALEJA: aunque uno no lo pueda creer, si hace pasar por un proceso de deshidratación a 100 kilos de papas, cuyo peso está compuesto por un 99% de agua, hasta obtener un peso que esté conformado por un 98% de agua, ¡el peso total que tienen que perder las papas es de 50 kilos!

Esto es lo que se conoce con el nombre de la paradoja de las papas.